U.C. 21021

Computação Numérica

02 de Fevereiro de 2011

INSTRUÇÕES

Para a resolução do teste, leia as seguintes informações e instruções, antes de responder

- Leia estas instruções na totalidade antes de iniciar a resolução do teste.
- O enunciado do teste incide sobre os cap. 1 a 4 do livro recomendado e sobre a linguagem de programação octave, tem 4 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- O único elemento de consulta permitido é o formulário que se encontra anexo a este enunciado.
- Para a execução do exame É INDISPENSÁVEL a utilização de calculadora.
- O cabeçalho deve ser preenchido de modo legível antes do início da resolução.
- As respostas devem ser escritas unicamente com caneta azul ou preta.
- O teste é constituído por 5 grupos. A cotação total do teste é de 20 valores.
- Nas respostas, tenha a preocupação de utilizar uma letra legível por outra pessoa.
- As suas respostas devem ser claras, **indicando todos os passos e cálculos intermédios necessários à compreensão da resolução de cada questão**. À simples indicação do resultado é atribuída a cotação zero.
- Utilize apenas o espaço disponibilizado para as respostas. Se necessário utilize folhas de rascunho para cálculos/gráficos/passos auxiliares e só depois transcreva a resposta adequada para o exame.
- O não cumprimento das instruções implica a anulação das respectivas questões.
- O tempo de realização do teste é de 120 minutos, mais 30 minutos de tolerância.

I [3 valores]

1.1. [1] Calcule o polinómio de Taylor com 2 termos não nulos da função $f(x) = x \operatorname{sen} x$ para $x \in [-\pi/4, \pi/4]$. Utilize $x_0 = 0$.

1.2. [1] Calcule o erro da aproximação polinomial obtida na alínea 1.1.

1.3. [1] Recorrendo à aproximação polinomial obtida na alínea 1.1 calcule uma aproximação $\overline{f}$ de $f(\pi/8)$. Calcule o respectivo erro e compare com o erro estimado na alínea 1.2.

II [4 valores]

Considere a seguinte equação,

$$e^{-x} - 0.4 = 0$$

2.1. [1] Mostre que a equação dada tem uma única raiz no intervalo [0, 2].

2.2. [2] Obtenha uma aproximação do valor dessa raiz aplicando três iterações do método de Newton, a partir do valor inicial $x_0 = 0$. Construa uma tabela onde constem os valores necessários de $k, x_k, f(x_k), f'(x_k)$, para k=0,1,2,3.

2.3. [1] Determine uma estimativa do erro para a aproximação da raiz determinada na alínea anterior.

III [4 valores]

Considere a matriz A e o vector b:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 4 & 16 & -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 29 \end{bmatrix}$$

3.1. [2] Determine a factorização LU de A.

3.2. [2] Resolva o sistema linear Ax = b, com $x = [\, x_1, x_2, x_3]^T$, utilizando a factorização encontrada na alínea 1.

IV [4 valores]

Considere a seguinte tabela de valores correspondente à função $f(x) = e^{-4x}$

x	*f(x)*
0.1	0.67032
0.3	0.30119
0.5	0.13534

4.1. [2.5] Obtenha o polinómio interpolador de *f(x)* nos três pontos tabelados, através da fórmula de Lagrange.

4.2. [1] Obtenha uma estimativa do erro de interpolação para $x = 0.2$.

4.3. [0.5] Obtenha o valor interpolado para $x = 0.2$ e calcule o erro. Compare com o valor estimado na alínea anterior.

V [5 valores]

5.1. [0.5] Apresente o comando Octave que por concatenação de duas submatrizes obtenha a matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5.2. [1.5] Considere as funções $f(x)=2^{-x}$ e $g(x)=x^3$. Apresente um pequeno programa em Octave que crie um gráfico conjunto das funções f() e g() para x de -1 a 1 com intervalos de uma centésima e com as seguintes características:
- f() a traço contínuo de cor vermelho, com legenda;
- g() a traço contínuo de cor azul, com legenda;
- com grelha;
- o ponto (0, 1) deve ser assinalado com um marcador tipo cruz, de cor preta;
- o eixo das abcissas deve ter a etiqueta "x";
- o eixo das ordenadas deve ter a etiqueta "f(x), g(x)".

5.3. [3] Escreva a função em Octave

```
function [x,y]=eqnl_bisseccao(x0,x1,n)
%
% Metodo da bisseccao (Equacoes nao lineares)
% x0,x1: intervalo inicial contendo a raiz
% n: numero de iteracoes a efectuar
% x: vector com a evolucao da estimativa da raiz
% y: vector com a evolucao do valor da funcao
% Nota: x,y devem ter dimensao n+2
```

que implemente o método da bissecção particularizado para a resolução da equação do grupo II.

FORMULÁRIO

Interpolação Polinomial

Fórmula Interpoladora de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças divididas

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_i](x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças descendentes

$$p_n(x_0 + sh) = f_0 + s\,\Delta_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta_0^2 + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta_0^n$$

Equações Não Lineares

Método da bissecção

$$x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$$

Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Método da secante

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Método do ponto fixo

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

Sistemas de Equações Lineares

Factorização $A = LU$

$$u_{1j} = a_{1j} \quad j \geq 1$$

$$l_{i1} = a_{i1} / u_{11} \quad i \geq 2$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad j \geq i \geq 2$$

$$l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki}) / u_{ii} \quad j > i \geq 2$$

Factorização (Choleski) $A = LL^T$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{i1} = a_{i1} / l_{11} \quad i \geq 2$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \quad i \geq 2$$

$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}\right) / l_{ii} \quad j > i \geq 2$$

FIM