UNIVERSIDADE ABERTA
www.univ-ab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

Curso: ....

Prova de Computação Numérica (21021) **Data: 2 de Fevereiro de 2010**

Nome: ....RESOLUÇÃO...

Nº de Estudante: .... **B. I. nº** ....

Turma: .... **Assinatura do Vigilante:** ....

RESERVADO PARA A *Universidade Aberta*

Classificação: (   ) ....

Prof. que classificou a prova: ....

Para a resolução do teste, leia as seguintes informações e instruções, antes de responder

- Leia estas instruções na totalidade antes de iniciar a resolução do teste.
- O enunciado do teste incide sobre os cap. 1 a 4 do livro recomendado e sobre a linguagem de programação octave, tem 10 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- O único elemento de consulta permitido é o formulário que se encontra anexo a este enunciado.
- Para a execução do exame É INDISPENSÁVEL a utilização de calculadora.
- O cabeçalho deve ser preenchido de modo legível antes do início da resolução.
- As respostas devem ser escritas unicamente com caneta azul ou preta.
- O teste é constituído por 5 grupos. A cotação total do teste é de 20 valores.
- Nas respostas, tenha a preocupação de utilizar uma letra legível por outra pessoa.
- As suas respostas devem ser claras, **indicando todos os passos e cálculos intermédios necessários à compreensão da resolução de cada questão**. À simples indicação do resultado é atribuída a cotação zero.
- Utilize apenas o espaço disponibilizado para as respostas. Se necessário utilize folhas de rascunho para cálculos/gráficos/passos auxiliares e só depois transcreva a resposta adequada para o exame.
- O não cumprimento das instruções implica a anulação das respectivas questões.
- O tempo de realização do teste é de 120 minutos, mais 30 minutos de tolerância.

I [2.5 valores]

Considere $x = 0.6382733...$ e a aproximação $\bar{x} = 0.6382$.

1.1. [1.5] Determine limites superiores ε_{LS}, r_{LS} respectivamente para os erros absoluto $\varepsilon \le \varepsilon_{LS}$ e relativo $r \le r_{LS}$. Os limites devem ser os menores possíveis para a precisão dada para x e $\bar{x}$.

$$\varepsilon = |x - \bar{x}| = |0.6382733... - 0.6382| < 0.0000734 = 0.734 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{LS} = 0.734 \cdot 10^{-4}$$

$$r = \frac{\varepsilon}{|x|} < \frac{\varepsilon_{LS}}{|x|} < \frac{0.734 \cdot 10^{-4}}{0.6382733} \simeq 0.1149977 \cdot 10^{-3} < 0.115 \cdot 10^{-3}$$

$$r_{LS} = 0.115 \cdot 10^{-3}$$

1.2. [0.75] Baseado no erro absoluto determinado na alínea anterior, determine quantos algarismos significativos tem a aproximação dada. Justifique.

$\varepsilon < 0.734 \cdot 10^{-4} < 0.5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$ último dígito significativo é o associado a 10^{-3} (que é o 8)

$\bar{x} = 0.\underline{638}2$ tem 3 alg. significativos

1.3. [0.25] Obtenha um novo valor aproximado, por arredondamento (simétrico) da segunda casa decimal.

$x = 0.638... \simeq 0.64$ porque $8 \geq 5$

II [2.5 valores]

Considere a seguinte equação,

$$(x-2)e^{x}-8=0$$

2.1. [0.5] Mostre que a equação dada tem uma única raiz no intervalo [2, 3].

$f(x)=(x-2)\,e^{x}-8$, $\quad f'(x)=e^{x}+(x-2)\,e^{x}=(x-1)\,e^{x}$

$f(2)=-8$, $\quad f(3)=12.0855$, $\quad f'(x)>0$ para $x\in[2,3]$

Como para $x\in[2,3]$, $f(x)$ é contínua, $f(2)\cdot f(3)<0$ e $f'(x)>0$, existe uma única raiz real para a equação $f(x)=0$.

2.2. [1.5] Obtenha uma aproximação do valor dessa raiz aplicando três iterações do método de Newton, a partir do valor inicial $x_0=3$. Construa uma tabela onde constem os valores necessários de k, x_k, $f(x_k)$, $f'(x_k)$, para k=0,1,2,3.

$x_{K+1}=x_K-f(x_K)/f'(x_K)$, $\quad x_0=3$

K	x_K	$f(x_K)$	$f'(x_K)$
0	3	12.0855	40.171
1	2.6991	2.3931	25.259
2	2.6044	0.17337	21.696
3	2.5964	$0.91815\cdot10^{-3}$	21.416

$r\simeq x_3=2.5964$

Nota: valores podem variar ligeiramente conforme precisão utilizada nos cálculos.

2.3. [0.5] Determine uma estimativa do erro para a aproximação da raiz determinada na alínea anterior.

$\varepsilon=|r-x_K|\simeq|x_{K+1}-x_K|$

$\varepsilon=|r-x_3|\simeq|x_4-x_3|$, $\quad x_4=2.5964$

$\varepsilon<10^{-4}$ porque x_3 e x_4 coincidem até à 4ª casa decimal.

III [4 valores]

Considere a matriz A e o vector b:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 12 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix}$$

3.1. [2] Determine a factorização LU de A.

$u_{11} = a_{11} = 4, \quad u_{12} = a_{12} = -1, \quad u_{13} = a_{13} = 2$

$l_{21} = a_{21}/u_{11} = 3, \quad l_{31} = a_{31}/u_{11} = 2$

$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 3, \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = -2$

$l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = 2$

$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 4$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3.2. **[2]** Resolva o sistema linear $Ax = b$, com $x = [\, x_1, x_2, x_3]^T$, utilizando a factorização encontrada na alínea 1.

$$Ax = LUx = b$$

$$Ly = b \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 3$$

$$y_2 = 20 - 9 = 11$$

$$y_3 = 24 - 6 - 22 = -4$$

$$Ux = y \iff \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = -1$$

$$x_2 = (11 - 2)/3 = 3$$

$$x_1 = (3 + 3 + 2)/4 = 2$$

IV [3 valores]

Considere a seguinte tabela de valores correspondente à função $f(x) = xe^x$

	x	$f(x)$
x_0	0.4	0.59673
x_1	0.6	1.09327
x_2	0.8	1.78043

4.1. [2.5] Obtenha o polinómio interpolador de $f(x)$ nos três pontos tabelados, através da fórmula de Lagrange.

$$p_2(x) = f(x_0)\,L_0(x) + f(x_1)\,L_1(x) + f(x_2)\,L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.6)(x-0.8)}{0.08}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0.4)(x-0.8)}{-0.04}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0.4)(x-0.6)}{0.08}$$

$$p_2(x) = 7.459125(x-0.6)(x-0.8) - 27.33175(x-0.4)(x-0.8)$$
$$+ 22.255375(x-0.4)(x-0.6)$$

4.2. [0.5] Obtenha o valor interpolado para x =0.7 e calcule o erro relativo expresso em percentagem.

$$p_2(0.7) = 1.41302 \quad , \quad f(0.7) = 1.40963$$

$$\varepsilon \simeq |1.41302 - 1.40963| = 0.00339$$

$$r \simeq \varepsilon / 1.40963 \simeq 0.24 \cdot 10^{-2} = 0.24\ \%$$

V [8 valores]

5.1. [1] Considere os vectores v1=[0 2], v2=[6 8] e v3=[3 4]. Apresente o comando Octave que utilizando estes vectores, obtenha por concatenação a matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

R: `A=[ [v2; v1] v3']`

5.2. [2] Considere as funções f(x)=cos(x) e g(x)=x^2. Apresente um pequeno programa em Octave que crie um gráfico conjunto das funções f() e g() para x de -2 a 2 com intervalos de uma décima e com as seguintes características:
- f() a traço contínuo de cor azul, com legenda;
- g() a traço contínuo de cor verde, com legenda;
- com grelha;
- o ponto (1,cos(1)) deve ser assinalado com um marcador tipo cruz, de cor vermelha;
- o eixo das abcissas deve ter a etiqueta “x”;
- o eixo das ordenadas deve ter a etiqueta “f(x), g(x)”.

R:
```
x=-2:0.1:2;
f=cos(x);  g=x.^2;
plot(x, f, "-b;cos(x);", x, g, "-g;x^2;", 1, ...
   cos(1), "rx");
grid; xlabel("x"); ylabel("f(x), g(x)");
```

5.3. [5] Escreva a função em Octave

```
function [x,y]=eqnl_newton(x0,n)
%
% Metodo de Newton (Equacoes nao lineares)
% x0: estimativa inicial para a raiz
% n: numero de iteracoes a efectuar
% x: vector com a evolucao da estimativa da raiz
% y: vector com a evolucao do valor da funcao
% Nota: x,y devem ter dimensao n+1
```

que implemente o método de Newton particularizado para a resolução da equação do grupo II.

R:

```
function [x,y]=eqnl_newton(x0,n)

x=zeros(n+1,1);  y=x;
x(1)=x0;  y(1)=f(x0);
for k=1:n
   x(k+1)=x(k)-y(k)/df(x(k));
   y(k+1)=f(x(k+1));
end

function y=f(x)
y=(x-2)*exp(x)-8;

function d=df(x)
d=(x-1)*exp(x);
```

FIM