Matemática Preparatória (21160) – unidade extra curricular
2015/16
E-Fólio A – 28 novembro a 5 dezembro 2015
Critérios de correção e orientações de resposta

O presente relatório consiste nos critérios de correção e de um exemplo de resolução das questões do e-fólio. Introduzem-se igualmente alguns comentários que pretendem detalhar melhor os pontos onde se observaram mais erros com vista ao esclarecimento e melhoria do desempenho no futuro.

- Foram aceites outras resoluções apresentadas pelos estudantes desde que equivalentes, com raciocínio, cálculos e conclusões corretos;

- O estudante deve assegurar que o e-fólio entregue é legível! Se o estudante tiver dificuldade em escrever linguagem matemática num editor informático de texto é preferível acrescentar texto manualmente (ou a totalidade) com letra legível e digitalizar o manuscrito;

- Recorda-se que **o e-Fólio é um teste individual**, não é um teste em que podem recorrer a ajuda externa (explicadores, etc) ou a partilhae discussão entre colegas de UC! Acresce-se que esta UC em particular foi uma opção do aluno, para recuperar algumas bases e auto-avaliar-se!

Questão 1 (0.5 val)

Indique, justificando, e sem usar uma calculadora, se a seguinte igualdade é verdadeira ou falsa.

$$\frac{1}{3}\log 8 + \frac{2}{3}\log 27 = \log 18$$

A resolução completa e correta da questão pressupõe que o estudante compreendeu o conceito de logaritmo (em qualquer base), sabe as propriedades dos logaritmos e das operações entre logaritmos (neste caso dos que estão na mesma base) e tem um certo à vontade na manipulação das expressões algébricas mais básicas.

O estudante deve apresentar uma resolução detalhada, justificando os seus passos, e o resultado final.

Para provar a igualdade podemos pegar no primeiro membro e procurar chegar ao segundo.

Usando a propriedade $a \times \log b = \log b^a \quad b > 0$, temos que

$$\frac{1}{3}\log 8 + \frac{2}{3}\log 27 = \log 8^{\frac{1}{3}} + \log 27^{\frac{2}{3}}$$

Podemos ainda simplificar as potências resultantes. Como, $8^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$ e

$27^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$, substituindo na expressão fica

$$\log 8^{\frac{1}{3}} + \log 27^{\frac{2}{3}} = \log 2 + \log 9 = \log(2 \times 9) = \log 18$$

Concluímos que a igualdade $\frac{1}{3}\log 8 + \frac{2}{3}\log 23 = \log 18$ **é verdadeira**.

Questão 2 (0.5 val)

Resolva a seguinte equação, indicando os detalhes da resolução.

$$8^{\left(x-\frac{1}{3}\right)} = 4^{x^2}$$

Nota: neste contexto, se não encontrar um valor de x real, a equação diz-se impossível.

Nesta questão, o estudante deveria apresentar todos os passos da resolução da equação, explicitando as propriedades das potências uteis para a resolução.

As resoluções apresentadas pelos estudantes apresentaram algusn erros para os quais devemos chamar a atenção.

Note que na expressão 4^{x^2}, **4** é a base, e x^2 é o expoente de 4, o qual, por sua vez, é um quadrado (*x* ao quadrado). Por exemplo, se *x*=3, temos $4^{3^2} = 4^9 = 262144$, pois o expoente de 4 é $3^2 = 9$.

Então, algumas expressões que foram apresentadas nas resoluções estão completamente erradas e o aluno deve corrigir para o futuro. Nomeadamente, ter atenção que $4^{x^2} \neq 4x^2$ e que $4^{x^2} \neq 4^{2x}$!!!

Para o exemplo com x=3, $4^{3^2} \neq 4\times 9^2 \Leftrightarrow 262144 \neq 36$!!! e $4^{3^2} \neq 4^6 \Leftrightarrow 262144 \neq 4096$.

Resolvendo agora a equação:

$8^{\left(x-\frac{1}{3}\right)} = 4^{x^2}$. Como $8 = 2^3$ e $4 = 2^2$, substituindo na equação vem

$\left(2^3\right)^{\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \left(2^2\right)^{x^2} \Leftrightarrow 2^{\left(3x-\frac{3}{3}\right)} = 2^{2x^2}$.

Dado que as bases agora são iguais a igualdade verificar-se-á se os expoentes forem iguais assim,

$2^{\left(3x-\frac{3}{3}\right)} = 2^{2x^2} \Leftrightarrow 3x-1 = 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0$ Usando a fórmula resolvente para equações do segundo grau obtemos as soluções desta equação.

$2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pm\sqrt{9-4\times 2\times 1}}{4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \dfrac{1}{2}$.

Como os valores obtidos são reais, as soluções da equação são $x \in \left\{\frac{1}{2};1\right\}$.

Questão 3 (1.5 val)

Considere as seguintes funções reais de variável real f e g:

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \qquad g(x) = \sqrt{x-1} \qquad h(x) = \frac{x^2-1}{x^3+1}$$

a) (0.5 v) Indique o domínio e os zeros de f, g e h, justificando.

Nesta alínea o estudante deveria determinar, para cada uma das 3 funções, o seu domínio (valores de x para os quais a função está definida) e os seus zeros (os valores de x em que a função se anula - ou seja, a imagem é igual a zero). A resolução completa e correta pressupõe que o estudante conhece os conceitos e sabe aplicá-los, apresentando os cálculos, devidamente justificados.

Verificaram-se alguns erros relevantes nas resoluções apresentadas pelos estudantes, nomeadamente não determinaram, em vários casos, os zeros de cada função em estudo, tendo assim as respostas ficado por vezes incompletas. Recomenda-se que revejam os conceitos importantes para o estudo de uma função.

Domínio das funções:

Função $f(x)$: calcular o domínio da função $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$.

O domínio são todos os pondo em que a função está definida, ou seja, todos aqueles em que o **denominador não se anula** (uma vez que a função é um quociente).

$D_f=\{x\in\Re:1-x^2\neq 0\}$

Ora, vamos procurar estes pontos que anulam o denominador para depois retirá-los do domínio.

$1-x^2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=-1\vee x=1$. Por isso, $D_f=\Re\setminus\{-1;1\}$.

nota importante: uma equação quadrática tem 2 soluções!!! Há dois valores de *x* que verificam $x^2\neq 1$, $\Rightarrow x\neq\pm\sqrt{1}$!!!

Função $g(x)$**:** calcular o domínio da função $g(x)=\sqrt{x-1}$.

Note-se que só existe a raíz quadrada de números não negativos em $\Re$. Então,

$Dg=\{x\in\Re:x-1\geq 0\}$

Ora, $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$, o que resulta em, $D_g=[1;+\infty[$.

Função $h(x)$: calcular o domínio da função $h(x)=\frac{x^2-1}{x^3+1}$.

Tal como antes, só temos problemas em definir a função nos pontos em que o denominador se anula, ou seja, não podem fazer parte do domínio. No numerador não há restrições aos valores de x:

$D_h=\{x\in\Re:x^3+1\neq 0\}$

Ora, $x^3+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Por isso, $D_h=\Re\setminus\{-1\}$.

Determinar os zeros das 3 funções:

Função $f(x)$: determinar os zeros da função f.

Ora, quando é que $f(x)$ se anula? Só pode ser quando o númerador é zero!

Então, $f(x)=0\Leftrightarrow x^2=0\wedge 1-x^2\neq 0\Leftrightarrow x=0\wedge(x\neq -1\vee x\neq 1)$

Conclusão: $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Função $g(x)$: determinar os zeros da função g.

Neste caso a função é zero quando o interior da raíz for igual a zero!

Ora $g(x)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$. Conclusão: $g(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Função $h(x)$: determinar os zeros da função h.

$h(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \wedge x^3-1\neq 0$, ou seja, os zeros da função h serão os elementos do domínio que anulam o numerador.
Como 1 e -1 anulam o numerador mas, -1 não pertence ao domínio da função (porque anula o denominador), h só tem um zero o número 1.
Conclusão: $h(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

b) (0.5 v) Determine a expressão e o domínio da função composta $f \circ g$. Justifique.

Na resolução desta alínea o estudante deveria indicar a definição de $f \circ g$ e especificar como se determina o domínio. Os passos e cálculos necessários devem ser explicitados.

Verificaram-se várias dificuldades na resolução desta pergunta. É comum esta matéria apresentar mais dificuldades, contudo é perfeitamente ultrapassável. Para tal o aluno deve compreender **muito bem** o conceito de função composta, e como esse conceito se reflete no domínio.

Conforme a teoria, a função que resulta da composição de duas funções chama-se função composta. $f \circ g$ significa f composta com g, e também se pode dizer f **após** g. Isto quer dizer que, a um dado x, aplico em primeiro lugar a função g, **e após esta**, **sobre a imagem resultante**, aplicamos a função f .

Por definição, o domínio da função composta $f \circ g$ é dado por:

$$D_{f\circ g}=\{x\in\Re : x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}=\{x\in\Re : x\geq 1 \wedge g(x)\neq 1 \wedge g(x)\neq -1\}$$

Ou seja, o domínio da Composta é uma intersecção de conjuntos/intervalos: é a intersecção entre
$\rightarrow$ o conjunto de todos os pontos x que pertencem ao domínio de g,
E
$\rightarrow$ o conjunto de todos os pontos em que e que $g(x)\in D_f$, ou seja, as imagens de $g(x)$ que estão no domínio de $f(x)$.

Lembrando que -1 e 1 estão fora do domínio de f, procuramos as soluções das equações

$g(x)\neq 1 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{x-1}}_{g(x)}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 2$ e

$g(x)\neq -1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\neq -1$, o que acontece para quaisquer que sejam os números reais.

Podemos então concluir que $D_{f\circ g}=[1;+\infty[\setminus\{2\}$

Pretendemos determinar a expressão da função composta $f \circ g$.

Ora, $(f\circ g)(x)=f(g(x)) \underbrace{=}_{\substack{aplicar\\ g(x)}} f(\sqrt{x-1}) \underbrace{=}_{\substack{aplicar\\ f(\sqrt{x-1})}} \dfrac{\sqrt{x-1}^2}{1-\sqrt{x-1}^2}=$

$$\frac{\sqrt{x-1}^2}{1-\sqrt{x-1}^2}=\frac{|x-1|}{1-|x-1|}=\begin{cases}\dfrac{x-1}{1-(x-1)} & se\ x-1\geq 0\\ \dfrac{-x+1}{1-(-x+1)} & se\ x-1<0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-1}{2-x} & se\ x\geq 1\\ \dfrac{-x+1}{x} & se\ x<1\end{cases}$$

Como o domínio da função composta não contempla o ramo de baixo (valores de x inferiores a 1), podemos dizer que a expressão da função composta é: $(f\circ g)(x)=\dfrac{x-1}{2-x}$

c) **(0.5 v)** Calcule o seguinte limite: $lim_{x\to -1}h(x)$

Na resolução desta alínea o estudante deveria aplicar os conhecimentos sobre o cálculo de limites, chegar a uma indeterminação e levantar esta indeterminação, chegando ao resultado final.

Começando por substituir o valor de x=1 na expressão do limite.

$\lim\limits_{x\to -1}h(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3+1}=\dfrac{0}{0}$ Como se trata de uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ vamos fatorizar o numerador e o denominador de modo a simplificar a expressão.

Assim, $x^2-1=(x-1)(x+1)$ e,

usando a regra de Ruffini (por exemplo), podemos escrever o denominador como um produto de fatores: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$.

Substituindo obtemos:

$$\lim_{x\to -1}h(x)=\frac{x^2-1}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)}{(x^2-x+1)}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}.$$

Questão 4 **(0.75 val)**

Considere a função real de variável real definida por:

$$m(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} & se\ x\neq 2\\ 3k+2 & se\ x=2\end{cases}$$

Determine o parâmetro real k de modo que a função seja contínua para $x=2$. Justifique.

A resolução desta alínea pressupõe que o estudante conheça e indique a definição de continuidade e que proceda aos cálculos necessários para responder ao pedido, indicando os vários passsos, devidamente justificados.

Por definição, a função será contínua para x=2 se o limite da função, quando x tende para 2, por valores diferentes de 2 (do 1º ramo da função), for igual ao valor da função no ponto, ou seja, na linguagem matemática, quando $\lim\limits_{x\to 2}m(x)=m(2)$.

Vamos então determinar o limite necessário

$$\lim_{x\to 2} m(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$$

Como obtemos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ vamos fatorizar o numerador e o denominador.

Usando a fórmula resolvente podemos escrever: $x^2-3x+2=(x-2)(x+1)$

Tendo em conta que o denominador é uma diferença entre quadrados, podemos escrever

$x^2-4=(x-2)(x+2)$

Substituindo obtemos:

$$\lim_{x\to 2} m(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}$$

Assim, $m(2)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 3k+2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow k=-\frac{7}{12}$

Conclusão:

Para que a função seja contínua para x=2, temos de ter $k=-\frac{7}{12}$.

Questão 5 **(0.75 val)**

Uma empresa multinacional produtora de equipamentos eletrónicos vende uma quantidade x de artigos (em milhões), quando p é o preço de cada unidade produzida (preço em unidades monetárias, u.m.). A relação existente entre o preço e a quantidade produzida pode ser expressa pela seguinte equação: $x^2 + 2px = p^2 + 25$.

Determine o número x de equipamentos eletrónicos que são vendidos a um preço p de 6 u.m. Justifique e interprete, tendo em conta o contexto real.

Esta questão pretende que o estudante seja capaz de compreender e articular a matemática com a interpretação dos resultados num determinado contexto, sendo por isso importante a interpretação final e as unidades de trabalho. Os cálculos devem ser apresentados e devidamente justificados.

Substituindo p por 6 vem $x^2+12x=36+25 \Leftrightarrow x^2+12x-61=0$

Usando a fórmula resolvente para equações do segundo grau obtemos as soluções para x :

$$x^2+12x-61=0 \Leftrightarrow x=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\times1\times(-61)}}{2} \Leftrightarrow x\cong 3{,}85 \vee x\cong -15{,}85$$

Como x representa o número de equipamentos eletónicos, **não pode assumir um valor negativo**. Assim, podemos concluir que são vendidos aproximadamente 3,85 milhões de equipamentos eletrónicos a um preço de 6 u.m.

FIM

Continuação de bom trabalho!!!