e-Fólio A

Nome: ……………………………………………………………………………………….

B.I.: ……………………………. Nº. de estudante: ………………………………………..

Licenciatura: ……………………………………………………………………………..

Unidade Curricular: Cálculo para Informática   Código: 21157

Data: …………….   Ano lectivo: 2014/15

Docente: Luís Gonzaga Albuquerque   Classificação: ………………………………..

PARA A RESOLUÇÃO DO e-FÓLIO A, ACONSELHA-SE QUE:

- Preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-fóilo A é composto por sete grupos de problemas, num total de duas páginas e termina com a palavra FIM. As suas respostas aos problemas deste e-fólio não podem ultrapassar doze páginas; páginas adicionais não serão classificadas.
- Escreva com letra legível ou usando um processador de texto matemático conveniente.
- Depois de ter realizado o e-fólio produza um único documento digital (de preferência pdf) que deve incluir esta folha de rosto e insira-o na página moodle da unidade curricular em e-fólio A até às 23h55 do dia 24 de Novembro.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- A cotação total deste e-fóilo é de 4 valores.
- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, a correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Para resolver os problemas do e-fólio deve usar os resultados do manual ou dos textos complementares se usar outro tipo de resultados deve fazer a respectiva prova.

- Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a respostas não justificadas.

1 Prove que quando $x \to 0$ $\quad e^x - 1 \sim \mathrm{x} + \frac{x^2}{2}$

Temos que provar que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x + \frac{x^2}{2}} = 1$ ora $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x + \frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x\left(1 + \frac{x}{2}\right)} = 1$ uma vez que

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{2}\right)} = 1$

Um erro frequente na resolução deste problema foi "deduzir a equivalência das duas funções a partir do facto que ambas as funções tendem a zero quando $x \to 0$" o que é falso como mostra o seguinte exemplo

$f(x) = x$ e $g(x) = 2x$ tem-se que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ mas $\frac{\lim\limits_{x\to 0} g(x)}{\lim\limits_{x\to 0} f(x)} = 2 \neq 1$

2 Calcule $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$ ora para $k = 0, \cdots n$ $\quad \sqrt{n} \le \sqrt{n+k} \le \sqrt{n+n}$

logo $\frac{n+1}{n\sqrt{2n}} \le \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \le \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ vamos analisar os limites $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$, $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{2n}}$

(ver proposição 5 pág 41 do manual) $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n} \lim\limits_{n\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ pois

$\lim\limits_{n\to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{2n}} = \lim\limits_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n} \lim\limits_{n\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} = 0$ pois

$\lim\limits_{n\to +\infty} \sqrt{2n} = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ ou seja pelo teorema das sucessões enquadradas tem-se que

$\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right) = 0$

3 Se $a_n > 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k > 1$ calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Considere-se a sucessão $\frac{1}{a_n}$ então tem-se que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{k} < 1$ logo atendendo ao ex 2 da 1ª actividade formativa tem-se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ e por conseguinte $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (ver proposição 5 pág 41 do manual)

4 Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^7 + \sqrt{n^3} + 100n^2}{8^n + 5^n + n}$

$\sqrt{n^3} = o(n^7)$ pois $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{n^7} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{11}{2}}} = 0$ e $100n^2 = o(n^7)$ pois $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{100n^2}{n^7} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{100}{n^5} = 0$ logo quando $n \to +\infty$ $n^7 + \sqrt{n^3} + 100n^2 \sim n^7$ por outro lado $5^n = o(8^n)$ pelo exercício 5 da 1ª actividade formativa e $n = o(8^n)$ pelo exercício 4 da 1ª actividade formativa logo $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^7 + \sqrt{n^3} + 100n^2}{8^n + 5^n + n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^7}{8^n}$ e de novo pelo exercício 4 da 1ª actividade formativa l tem-se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^7}{8^n} = 0$

5 Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^4 + n} - \sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{\left(n^2+1\right)\left(n^2+2\right)}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+n-n^4-3n^2-2}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4+3n^2+2}}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-3n^2+n-2}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}\right)}=\frac{-3}{2}$$

6 Prove que a função $f(x)=x^8+2x^2-1$ tem pelo menos duas raízes.

$f(0)=-1<0$ e $f(1)=f(-1)=2>0$ como a função f é contínua pelo teorema de Bolzano (Ver manual pág 62) a função tem pelo menos uma raiz no intervalo $\left]-1,0\right[$ e outra no intervalo $\left]0,1\right[$

7 Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{e^x-1}$

Neste problema houve uma gralha deveria ter-se Calcule $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{e^x-1}$ e neste caso tem-se

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{e^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left|sen(x)\right|}{e^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen(x)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{sen(x)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}}=1$$

Como foi formulado o prblema não tem limite pois como vimos $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{e^x-1}=1$ e por outro lado $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{e^x-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left|sen(x)\right|}{e^x-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-sen(x)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-sen(x)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}}=-1$

Devido a esta gralha a totalidade da cotação do problema foi atribuída a todos os estudantes.

FIM