**U.C. 21002**

**Álgebra Linear I**

**29 de Fevereiro de 2016**

# - INSTRUÇÕES -

- O tempo de duração da prova de exame é de 2 horas, acrescida de 30 minutos de tolerância.
- O estudante deve preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível. As questões do grupo I (escolha múltipla) devem ser respondidas no enunciado. As questões dos demais grupos devem ser respondidas no caderno de prova.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- A prova é constituída por 4 páginas e termina com a palavra FIM. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeitos de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Nas questões que envolvam cálculos ou demonstrações o aluno deve explicitar todos os passos necessários. Respostas sem justificação não serão cotadas.
- Não é permitido usar máquina de calcular nem quaisquer elementos de consulta.

Critérios de Avaliação

Grupo I (escolha múltipla): Cada questão do grupo I vale 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados 1/3 valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta assinalada. A classificação mínima do grupo I é de 0 valores. As restantes questões têm as seguintes cotações:

| **II** | **III** | **IV** | **V** |
|---|---|---|---|
| 4 val. | 4 val. | 4 val | 4 val |

**Por favor preencha os seus dados**

Nome:

Nº de Estudante

B.I.:

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo. Caso pretenda anular uma resposta escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

**I.** Questões de escolha múltipla.

**1.** Sejam $A$ e $B$ matrizes semelhantes pertencentes a $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então:

- [ ] a) $A^2 = B^2$
- [ ] b) $\det(A^2) = \det(B^2)$
- [ ] c) $A - B = I_n$
- [ ] d) $\det A = -\det B$

**2.** Sejam $A$ e $B$ matrizes pertencentes a $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Então:

- [ ] a) $\det(A)\det(B) = -\det(-A)\det(-B)$
- [ ] b) $\det(-A)\det(B) = \det(A)\det(-B)$
- [ ] c) $\det(A^3 - B^3) = I_3$
- [ ] d) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

**3.** Considere em $\mathbb{R}_3[x]$ a base $(1, x, x^2, x^3)$ e a aplicação linear de $\mathbb{R}_3[x]$ em $\mathbb{R}_3[x]$ definida por $g(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_3 - a_2 + a_1 - a_0$. Nessa base temos:

- [ ] a) Nuc $g = \emptyset$ e Im $g = \mathbb{R}_3[x]$.
- [ ] b) Nuc $g = \{0\}$ e Im $g = \mathbb{R}[x]$.
- [ ] c) dim(Nuc $g$)= 1 e dim(Im $g$)= 1.
- [ ] d) dim(Nuc $g$)= 3 e dim(Im $g$)= 1.

**4.** Considere em $\mathbb{R}^3$ a sequência

$$H = \{(1,2,1), (1,0,2), (1,\pi,0), (0,0,0)\}$$

Então:

- [ ] a) $H$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- [ ] b) $H$ é uma sequência geradora linearmente independente.
- [ ] c) $\langle(1,2,1), (1,0,2), (1,\pi,0), (0,0,0)\rangle = \mathbb{R}^3$
- [ ] d) $\dim(\langle(1,2,1), (1,0,2), (1,\pi,0), (0,0,0)\rangle) = 4$

**Soluções:**
1) B
2) B
3) D
4) C

| |
|---|
| Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter. |

**II.** Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Se $\alpha \neq 0$ é um valor próprio de uma matriz invertível $A$, então $\alpha^{-1}$ é valor próprio de $A^{-1}$.
b) Se $A^2$ é a matriz nula então $A$ é a matriz nula.
c) Se $A^2$ é a matriz nula então o único valor próprio de $A$ é 0.

**Soluções:**
a) Verdadeiro, pois se $Av = \alpha v$ então $\alpha^{-1}v = \alpha^{-1}A^{-1}Av = \alpha^{-1}A^{-1}\alpha v = A^{-1}v$
b) Falso. Contra-exemplo:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

exercício: como obter este tipo de contra-exemplo?
c) Verdadeiro. Seja $A$ uma matriz tal que $A^2 = 0$ e $v \neq 0 : Av = \alpha v$. Então

$$0 = 0v = A^2 v = A\alpha v = \alpha^2 v.$$

Então como $v \neq 0$, $\alpha = 0$.
**III.** i) Aplicando o método de eliminação de Gauss determine se a matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

é invertível, e em caso afirmativo calcule $R^{-1}$ usando o método de eliminação de Gauss-Jordan aplicado à matriz $[R|I_4]$.

ii) Utilizando a alínea anterior resolva a equação $RX = B$ onde $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

**Soluções:**
i) Tomando a matriz aumentada e aplicando o método de Gauss-Jordan obtemos

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -1 & 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

ii) Agora que temos $R^{-1}$ basta fazer

$$R^{-1}B = R^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

**IV.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

a) Calcule os valores próprios de $A$.

b) Será a matriz diagonalizável? Justifique a sua resposta.

c) Determine os vectores próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea a).

d) Determine se é possível escrever $A$ na forma $A = PDP^{-1}$ onde $P$ é uma matriz invertível e $D$ é uma matriz diagonal. Em caso afirmativo determine $P$ e $D$ nessas condições.

**Soluções:**

a) O polinómio característico é

$$-\lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 2),$$

cujos zeros são $-2$, $-1$, e $0$.

b) Sim, porque tem três valores próprios distintos.

c) Para $\lambda = -2$ temos que resolver o sistema homogéneo defnido pela matriz

$$[A + 2I] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução é o espaço próprio gerado por

$$v_{-2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma, para $\lambda = -1$:

$$[A + I] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_{-1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e para $\lambda = 0$:

$$[A-0I]=\begin{bmatrix}2&-2&-2\\3&-3&-2\\2&-2&-2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow v_0=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

d)

$$P=[v_{-2},v_{-1},v_0]=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&2&0\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

**V.** Considere a aplicação linear $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$h(a,b,c)=(a+b)x^2+c,$$

para qualquer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Determine $\mathcal{M}(h;B,B')$, com

$$B=((0,0,1),(1,0,0),(0,1,1))\ \text{ e } B'=\big(x^2+1,2x,-x+1\big)$$

**Soluções:**
Sendo

$$B=(e_1,e_2,e_3)=((0,0,1),(1,0,0),(0,1,1))\ \text{ e } B'=(e_1',e_2',e_3')=\big(x^2+1,2x,-x+1\big)$$

Temos

$$h(e_1)=1=2(x/2)+(-x+1)=e_2'/2+e_3'$$

$$h(e_2)=x^2=(x^2+1)-2(x/2)-(-x+1)=e'1-e_2'/2-e_3'$$

$$h(e_3)=x^2+1=e_1'$$

Então

$$M(h;B,B')=\begin{bmatrix}0&1&1\\1/2&-1/2&0\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

**FIM**