UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

U.C. 21021

Computação Numérica

21 de fevereiro de 2014

INSTRUÇÕES

Para a resolução do teste, leia as seguintes informações e instruções, antes de responder

- Leia estas instruções na totalidade antes de iniciar a resolução do teste.
- O enunciado do teste incide sobre os cap. 1 a 4 do livro recomendado e sobre a linguagem de programação octave, tem 4 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- O único elemento de consulta permitido é o formulário que se encontra anexo a este enunciado.
- Para a execução do exame É INDISPENSÁVEL a utilização de calculadora.
- O cabeçalho deve ser preenchido de modo legível antes do início da resolução.
- As respostas devem ser escritas unicamente com caneta azul ou preta.
- Nas respostas, tenha a preocupação de utilizar uma letra legível por outra pessoa.
- As suas respostas devem ser claras, **indicando todos os passos e cálculos intermédios necessários à compreensão da resolução de cada questão**. À simples indicação do resultado é atribuída a cotação zero.
- O não cumprimento das instruções implica a anulação das respetivas questões.
- O tempo de realização do teste é de 120 minutos, mais 30 minutos de tolerância.

I [4 valores]

1. Considere a função $f(x) = (e^{2x} - 1)/x$ para a qual se pretende calcular valores para x muito perto de 0, ou seja, $x \approx 0$.

1.1. [1] Tendo em conta as operações aritméticas envolvidas no cálculo da função $f(x)$, comente sobre a previsão da precisão dos resultados.

1.2. [1.5] Calcule o polinómio de Taylor com 3 termos da função $f(x)$. Utilize $x_0 = 0$. (sugestão: considere primeiro a aproximação polinomial para e^{2x}).

1.3. [1.5] Determine o erro da aproximação polinomial de $f(x)$ da alínea 1.2 para $x \in [-0.1, 0.1]$ (sugestão: considere primeiro a aproximação polinomial para e^{2x}).

II [10 valores]

2. Considere a matriz A e o vetor b:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2.1. [4] Resolva o sistema linear Ax = b utilizando o método de eliminação de Gauss com escolha parcial de pivot. Indique claramente as operações elementares realizadas em cada passo da resolução

2.2. [6] Escreva a função em Octave,

```
function x=elim_gaussp(A,b)
%
% Metodo de eliminação de Gauss
% Calcula a solucao de Ax=b
% A,b matriz e vector do sistema de equacoes
% x: vector com a solução do sistema
```

que implemente o método da eliminação de Gauss com seleção de pivot para a resolução de um sistema de equações lineares definido por $Ax = b$.

III [6 valores]

3. Considere a função $f(x) = \sin^2(x)$.

3.1. [3] Obtenha o polinómio interpolador de grau 3 nos nós (em radianos) 0, 0.2, 0.4, 0.6, através da fórmula de Newton com diferenças divididas.

3.3. [1] Obtenha o valor interpolado para x =0.5 e calcule os seus erros absoluto e relativo.

3.4. [2] Escreva um programa em octave que crie um gráfico conjunto do polinómio interpolador calculado e da função $f(x)$ no intervalo de 0 a 0.6 com cerca de 100 pontos. O gráfico deve ter título, legendas nos eixos e grelha. Os pontos de interpolação devem ser assinalados com uma cruz verde.

FORMULÁRIO

Interpolação Polinomial

Fórmula Interpoladora de Lagrange

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,l_i(x)$$

$$l_i(x)=\prod_{j=0,\,j\neq i}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças divididas

$$p_n(x)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n} f\left[x_0,\ldots,x_i\right](x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças descendentes

$$p_n(x_0+sh)=f_0+s\,\Delta_0+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta_0^2+\ldots+\frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta_0^n$$

Equações Não Lineares

Método da bissecção

$$x_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}$$

Método de Newton

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Método da secante

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$

Método do ponto fixo

$$x_{k+1}=g(x_k)$$

Sistemas de Equações Lineares

Factorização $A=LU$

$$u_{1j}=a_{1j}\quad j\geq 1$$

$$l_{i1}=a_{i1}/u_{11}\quad i\geq 2$$

$$u_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj}\quad j\geq i\geq 2$$

$$l_{ji}=(a_{ji}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{jk}u_{ki})/u_{ii}\quad j>i\geq 2$$

Factorização (Choleski) $A=LL^T$

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}}$$

$$l_{i1}=a_{i1}/l_{11}\quad i\geq 2$$

$$l_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}^2}\quad i\geq 2$$

$$l_{ji}=\left(a_{ji}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}l_{jk}\right)/l_{ii}\quad j>i\geq 2$$

FIM