

**QUESTÃO 1 (4 valores) (1.1 = 1.0; 1.2 = 3.0)**

Recorra ao algoritmo *scan-line* para calcular as coordenadas dos *pixels* de preenchimento da área bidimensional definida pelo polígono constituído pelos vértices **A(4, 1)**, **B(7, 4)**, **C(4, 7)** e **D(1, 4)**

**1.1.** Apresente o estado da tabela de arestas (ET - Edge Table) e tabela de arestas ativas (AET - Active Edge Table) no início do algoritmo.

**1.2.** Calcule as coordenadas dos pixels de preenchimento, apresentando cada iteração do algoritmo separadamente, indicando o estado da ET e AET, e apresente no final, de forma gráfica, o preenchimento.

R:

1.1.)

Antes de iniciar as iterações do algoritmo é necessário obter para cada aresta do polígono que vai ser preenchido, um conjunto de elementos informativos sobre os mesmos, tais como: declive  $m$  e  $\frac{1}{m}$ ,  $x_{\min}$ ,  $y_{\min}$  e  $y_{\max}$  por forma a podermos construir as tabelas ET e AET.

Nota:  $x_{\min}$  é a coordenada que acompanha  $y_{\min}$ .

Para cada aresta do polígono, vista como segmento de reta, obtemos os valores de  $m = \frac{dy}{dx}$  tendo em conta que cada aresta  $\overline{A_1A_2}$  é obtida através dos pontos sucessivos do polígono ligando o último ponto ao primeiro.

Temos assim:

$$\overline{AB} = [(4,1), (7, 4)]: m = \frac{4-1}{7-4} = \frac{3}{3}; \frac{1}{m} = 1; y_{\min} = 1; x_{\min} = 4; y_{\max} = 4;$$

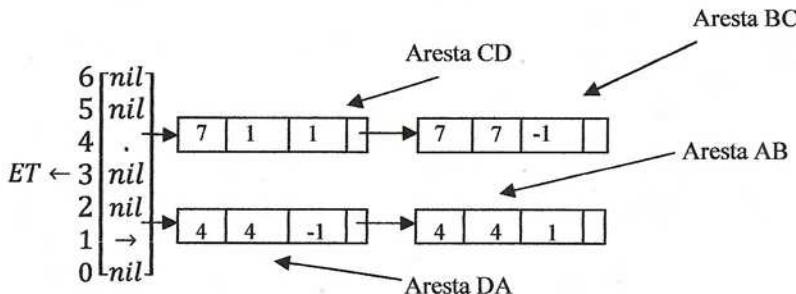
$$\overline{BC} = [(7,4), (4, 7)]: m = \frac{7-4}{4-7} = \frac{1}{-1} = -1; \frac{1}{m} = -1; y_{\min} = 4; x_{\min} = 7; y_{\max} = 7;$$

$$\overline{CD} = [(4,7), (1, 4)]: m = \frac{4-7}{1-4} = \frac{-3}{-3} = \frac{1}{1}; \frac{1}{m} = 1; y_{\min} = 4; x_{\min} = 1; y_{\max} = 7;$$

$$\overline{DA} = [(1,4), (4, 1)]: m = \frac{1-4}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1; \frac{1}{m} = -1; y_{\min} = 1; x_{\min} = 4; y_{\max} = 4;$$

No arranque do algoritmo as tabelas ET e AET tem o seguinte estado:

$AET \leftarrow nil$



2.2)

Seja a linha de varrimento (*scan-line*) definida por  $SL$  sendo que o varrimento se faz na vertical, percorrendo o eixo Y desde os valores mais pequenos até à maior coordenada em Y do polígono.

$SL \leftarrow 1$  ou seja, a linha de varrimento recebe o valor do primeiro índice da entrada da tabela ET que não esteja vazia, neste caso a entrada 1, que corresponde à coordenada y menor do polígono partilhada pelas arestas  $\overline{AB}$  e  $\overline{DA}$ .

### Iteração do algoritmo

Até que  $AET$  fique vazia repete

#### Iteração 1

- 1.1) Mover de  $ET$  para  $AET$  as arestas que passam a ser intersectadas por  $SL$ , ou seja, o valor de entrada com índice  $SL$ .  
A tabela  $AET$  recebe então os valores da(s) aresta(s) de  $ET$  com entrada  $SL$ .

$$AET \leftarrow \overbrace{|4|4|-1|}^{\overline{DA}} \rightarrow \overbrace{|4|4|-1|}^{\overline{AB}}$$

- 1.2) Eliminar de  $AET$  todas as arestas que deixam de ser intersectadas pela linha de varrimento  $SL$ . Basta verificar se existe alguma aresta em  $AET$  cujo  $y_{máximo} \leq SL$   
Neste caso temos  $SL = 1$  e  $\overline{EA} y_{máximo} = 4$  e  $\overline{AB} y_{máximo} = 4$  logo  $SL <$  que ambos. Não existem arestas em condições de ser eliminadas de  $AET$ , ficando esta tabela inalterada.
- 1.3) Identificar pontos a desenhar no ecrã entre pares de arestas de  $AET$  (estas são as intersectadas por  $SL$ ).  
A coordenada em y é o valor de  $SL$  e temos de calcular os valores da abcissa x mais à esquerda e mais à direita (daqui a importância do valor de  $x_{mínimo}$  a abcissa que acompanha a ordenada do ponto de intersecção de  $SL$  com cada aresta).

Ou seja, vamos considerar os pontos entre  $x_{mínimo}$  de pares de arestas em  $AET$ .

Neste caso,  $\overline{EA} x_{mínimo} = 4$  e  $\overline{AB} x_{mínimo} = 4$  logo

Pontos a ativar: (4,1)

- 1.4) Incrementamos  $SL$  ou seja  $SL \leftarrow SL + 1; SL = 2$
- 1.5) Atualizamos  $AET$  de  $x_{mínimo}$  tendo em conta o incremento  $SL$  vem  
 $x_{i+1} \leftarrow x_i + \frac{1}{m}$  para qualquer aresta.

Temos então:

$$\overline{DA}: x_{i+1} \leftarrow 4 + (-1) = 3; \overline{AB}: x_{i+1} = 4 + 1 = 5$$

$$\text{Ficando } AET \leftarrow \overbrace{|4|3|-1|}^{\overline{DA'}} \rightarrow \overbrace{|4|5|1|}^{\overline{AB'}}$$

#### Iteração 2

- 2.1) Existem arestas na entrada  $SL (==2)$  de  $ET$ ? Não.

- 2.2) Existem arestas em AET tal que  $y_{máximos} \leq SL$ ? Não.  
 2.3) Pontos a ativar no ecrã entre pares de arestas de AET.  
 Abcissas entre  $x = 3 (\overline{DA}' x_{mínimo})$  e  $x = 5 (\overline{AB}' x_{mínimo})$

Pontos a ativar: (3,2), (4,2), (5,2)

- 2.4) Incrementamos SL ou seja  $SL \leftarrow SL + 1; SL = 3$   
 2.5) Atualizamos AET tal que  
 $\overline{DA}': x_{i+1} \leftarrow 3 + (-1) = 2; \overline{AB}': x_{i+1} = 5 + 1 = 6$

Ficando  $AET \leftarrow \overbrace{|4|2|-1|}^{\overline{DA}''} \rightarrow \overbrace{|4|6|1|}^{\overline{AB}''}$

### Iteração 3

- 3.1) Existem arestas na entrada  $SL (==3)$  de ET? Não.  
 3.2) Existem arestas em AET tal que  $y_{máximos} \leq SL$ ? Não.  
 3.3) Pontos a ativar no ecrã entre pares de arestas de AET.  
 Abcissas entre  $x = 2 (\overline{DA}'' x_{mínimo})$  e  $x = 6 (\overline{AB}'' x_{mínimo})$

Pontos a ativar: (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3)

- 3.4) Incrementamos SL ou seja  $SL \leftarrow SL + 1; SL = 4$   
 3.5) Atualizamos AET tal que  
 $\overline{DA}'': x_{i+1} \leftarrow 2 + (-1) = 1; \overline{AB}'': x_{i+1} = 6 + 1 = 7$

Ficando  $AET \leftarrow \overbrace{|4|1|-1|}^{\overline{DA}'''} \rightarrow \overbrace{|4|7|1|}^{\overline{AB}'''}$

### Iteração 4

- 4.1) Existem arestas na entrada  $SL (==4)$  de ET? Sim, as arestas  $\overline{BC}$  e  $\overline{CD}$  (passam a ser intersectadas pela linha de varrimento SL)  
 Fica  $AET \leftarrow \overbrace{|4|1|-1|}^{\overline{DA}'''} \rightarrow \overbrace{|7|1|2|}^{\overline{CD}} \rightarrow \overbrace{|4|7|1|}^{\overline{AB}'''} \rightarrow \overbrace{|7|7|-1|}^{\overline{BC}}$  (ordenada por  $x_{min}$ )
- 4.2) Existem arestas em AET tal que  $y_{máximos} \leq SL$ ? Sim, as arestas  $\overline{DA}'''$  e  $\overline{AB}'''$  pelo que são eliminadas da tabela AET (estas arestas deixam de ser intersectadas)  
 Fica  $AET \leftarrow \overbrace{|7|1|1|}^{\overline{CD}} \rightarrow \overbrace{|7|7|-1|}^{\overline{BC}}$
- 4.3) Pontos a ativar no ecrã entre pares de arestas de AET.  
 Abcissas entre  $x = 1 (\overline{CD} x_{mínimo})$  e  $x = 7 (\overline{BC} x_{mínimo})$

Pontos a ativar: (1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4), (7,4)

4.4) Incrementamos SL ou seja  $SL \leftarrow SL + 1; SL = 5$

4.5) Atualizamos AET tal que

$$\overline{CD}: x_{i+1} \leftarrow 1 + 1 = 3; \overline{BC}: x_{i+1} = 7 + (-1) = 6$$

$$\text{Ficando } AET \leftarrow \overbrace{[7|2|1]}^{\overline{CD}'} \rightarrow \overbrace{[7|6|-1]}^{\overline{BC}'}$$

### Iteração 5

5.1) Existem arestas na entrada SL ( $==5$ ) de ET? Não.

5.2) Existem arestas em AET tal que  $y_{máximos} \leq SL$ ? Não.

5.3) Pontos a ativar no ecrã entre pares de arestas de AET.

$$\text{Abscissas entre } x = 2 (\overline{CD}' x_{mínimo}) \text{ e } x = 6 (\overline{BC}' x_{mínimo})$$

Pontos a ativar: (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5)

5.4) Incrementamos SL ou seja  $SL \leftarrow SL + 1; SL = 6$

5.5) Atualizamos AET tal que

$$\overline{CD}'': x_{i+1} \leftarrow 2 + 1 = 3; \overline{BC}'': x_{i+1} = 6 + (-1) = 5$$

$$\text{Ficando } AET \leftarrow \overbrace{[7|3|1]}^{\overline{CD}''} \rightarrow \overbrace{[7|5|-1]}^{\overline{BC}''}$$

### Iteração 6

6.1) Existem arestas na entrada SL ( $==6$ ) de ET? Não.

6.2) Existem arestas em AET tal que  $y_{máximos} \leq SL$ ? Não.

6.3) Pontos a ativar no ecrã entre pares de arestas de AET.

$$\text{Abscissas entre } x = 3 (\overline{CD}'' x_{mínimo}) \text{ e } x = 5 (\overline{BC}'' x_{mínimo})$$

Pontos a ativar: (3,6), (4,6), (5,6)

6.4) Incrementamos SL ou seja  $SL \leftarrow SL + 1; SL = 7$

6.5) Atualizamos AET tal que

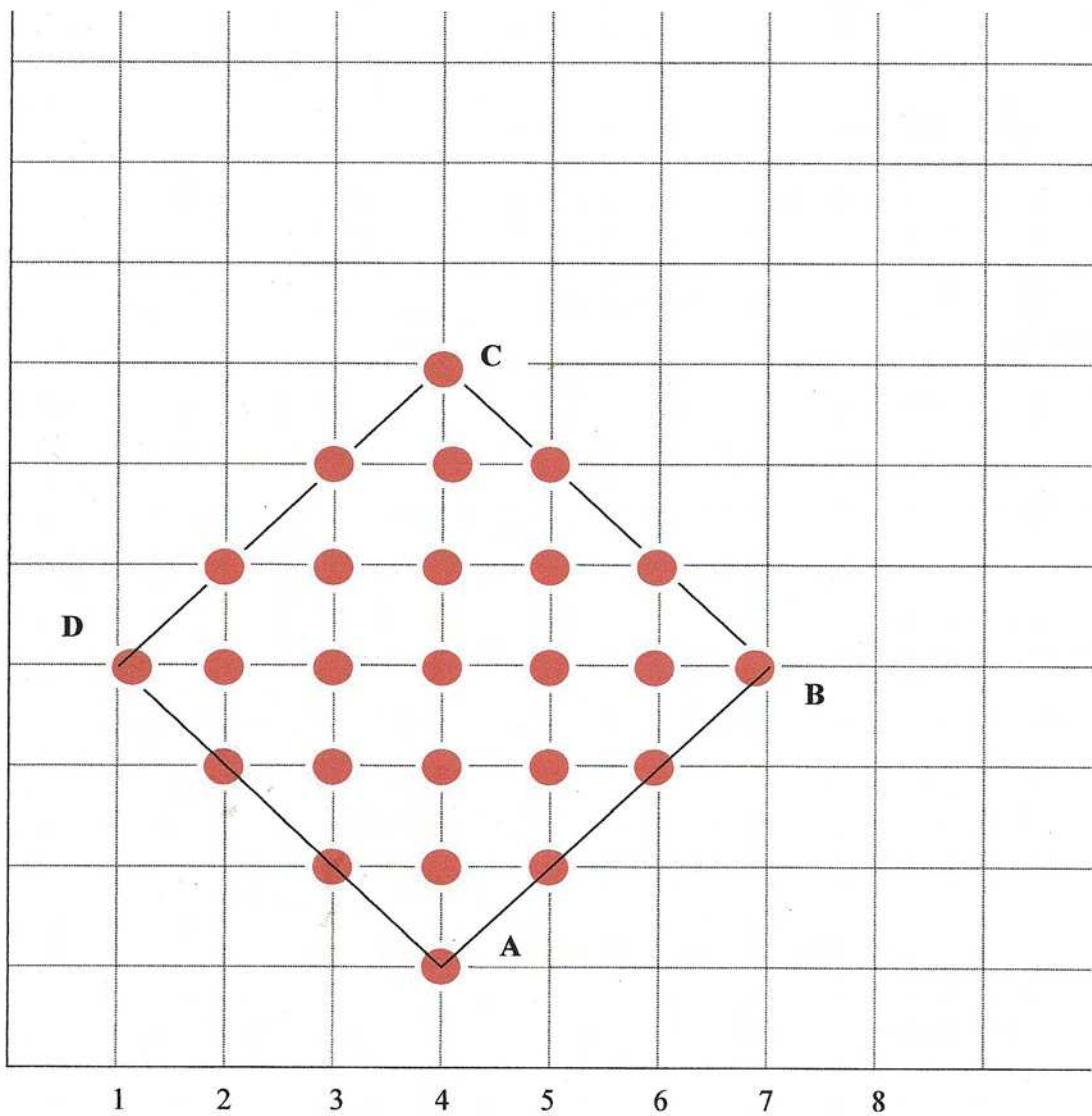
$$\overline{CD}''': x_{i+1} \leftarrow 3 + 1 = 4; \overline{BC}''': x_{i+1} = 5 + (-1) = 4$$

$$\text{Ficando } AET \leftarrow \overbrace{[7|4|1]}^{\overline{CD}'''} \rightarrow \overbrace{[7|4|-1]}^{\overline{BC}'''}$$

### Iteração 7

7.1) Existem arestas na entrada SL ( $==7$ ) de ET? Não.

7.2) Existem arestas em AET tal que  $y_{máximos} \leq SL$ ? Sim, as arestas  $\overline{BC}'''$  e  $\overline{CD}'''$  (deixam de ser intersectadas pela linha de varrimento SL) sendo eliminadas de AET.  
Ficando  $AET \leftarrow \text{nil}$  = condição para terminar o algoritmo.



**QUESTÃO 2 (2 valores)**

Dada a matriz de coeficientes geométricos  $\mathbf{B}$  obtenha os vetores coeficientes algébricos  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$  sendo que

$$\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z], \mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z], \mathbf{c} = [c_x \ c_y \ c_z], \mathbf{d} = [d_x \ d_y \ d_z].$$

Apresente todos os cálculos e matrizes utilizadas.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

R:

2)

Temos que  $A = MB$  sendo que  $M$  é a Matriz de Transformação Universal.

Tendo ainda que:

$$A = [a \ b \ c \ d]^T = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

Logo basta resolver por cálculo vetorial a expressão (sendo  $M$  conhecida):

$$\begin{aligned} A = MB &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (-2+4-1) & (2-1+1) \\ -2 & (3-6+1) & (-3+2-1) \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$a = [1 \ 1 \ 2]; \ b = [-2 \ -2 \ -2]; \ c = [1 \ 0 \ -1]; \ d = [0 \ -1 \ 1]$$

**QUESTÃO 3 (2 valores)**

Admita que temos as seguintes funções de mistura Bézier.

$$B_0 = 4u - 8$$

$$B_1 = 2u^2 + 4u + 3$$

$$B_2 = -2u^2 - 8u + 5 \quad \text{com } u \in [0, 1].$$

Sendo os três pontos de controlo  $P_0 = (1, 0, 1)$ ,  $P_1 = (-1, 0, -1)$ ,  $P_2 = (-2, 2, 0)$  calcule o ponto  $P = (p_x, p_y, p_z)$  da curva Bézier em  $u = 0.75$

R:

3)

Vamos recorrer ao cálculo matricial referente a Bézier de grau 2 (quadráticas), que são controladas por 3 pontos, tal que:

$$p(u) = UMP \text{ em que } U = [u^2 \ u \ 1]; M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -8 \\ -8 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } P = [P_0 \ P_1 \ P_2]^T$$

Assim vem que:

$$p(u) = [u^2 \ u \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -8 \\ -8 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = [u^2 \ u \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -8 \\ -8 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Se substituirmos por  $u = 0.75$  vem:

Veja-se que esta expressão permite obter qualquer ponto da curva com  $u \in [0, 1]$ . Seja  $u = 0.75 = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} p\left(u = \frac{3}{4}\right) &= \left[\binom{3}{4}^2 \ \frac{3}{4} \ 1\right] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -8 \\ -8 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 16 & -16 & 0 \\ -21 & 10 & -11 \end{bmatrix} = \\ &= \left[ \left( \left( \frac{9}{16} \right) * 2 + \left( \frac{3}{4} \right) * 16 - 21 \right), \left( -\left( \frac{9}{16} \right) * 4 - \left( \frac{3}{4} \right) * 16 + 10 \right), \left( -\left( \frac{9}{16} \right) * 2 - 11 \right) \right] \\ &= \left[ \left( \frac{88}{8} \right), -\left( \frac{34}{8} \right), -\left( \frac{97}{8} \right) \right] \end{aligned}$$

**QUESTÃO 4 (2 valores)**

Descreva sucintamente as principais diferenças entre uma superfície gerada por uma grelha de curvas Hermite e outra gerada por curvas Bézier.

R:

4)

Uma superfície gerada por uma grelha de curvas Hermite é mais difícil de controlar que se for gerada por curvas Bézier pois obriga a especificar as tangentes nos pontos extremos de junção. Nas curvas Bézier as tangentes são interpoladas.

Uma superfície gerada por curvas Bézier garante continuidade  $C^1$  nos pontos de junção sendo que nas curvas Hermite apenas se assegura continuidade  $G^1$ , sendo que a suavidade na junção é maior na superfície Bézier.

Ou seja as superfícies Bézier permitem modelar objetos com maior exigência de suavidade, ou seja, maior nível de realismo.

---

#### QUESTÃO 5 (2 valores)

Apresente e justifique uma técnica de representação de sólidos que recomendaria para modelação de casas tipicamente portuguesas (1 piso; volumes paralelepípedicos; coberturas 1-2 águas; 1-2 varandas).

R:

5) Tratando-se tipicamente de modelação com base na composição a partir de objetos previamente definidos (volumes) e mais simples a melhor técnica é a **instanciação de primitivas** a aplicar num conjunto de objetos básicos necessários à composição e disponibilizar para o efeito funções booleanas sobre volumes.

Pode-se ainda recorrer à **decomposição espacial** sendo que os objetos de partida constituem os modelos mais simples (telhado, varanda, corpo principal da casa), e que permitem construir as casas também recorrendo a funções booleanas sobre volumes.