U.C. 21002

Álgebra Linear I

28 de julho de 2017

- O exame é composto por **6** grupos de questões e respetivas alíneas, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) **deverão ser respondidas no enunciado**.
- As questões dos grupos **II**, **III**, **IV**, **V**, e **VI** deverão ser respondidas no Caderno de Prova.
- Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. A cotação das restantes questões é a seguinte:

II	**III**	**IV**	**V**	**VI**
3.0 val.	3.0 val.	4.0 val.	4.0 val.	2.0 val.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

I. Questões de escolha múltipla.

> Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

Questão 1

Seja $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ uma matriz que tem valores próprios $-3, -2, 2, 3$. Então a característica de A é igual a

- ☐ a) 1.
- ☐ b) 2.
- ☐ c) 3.
- ☐ d) 4.

Questão 2

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que

$$T(1,0) = (1,1,1) \text{ e } T(1,1) = (-1,0,0).$$

Então $T(2,1)$ é igual a

- ☐ a) $(1,3,2)$.
- ☐ b) $(0,1,1)$.
- ☐ c) $(3,1,1)$.
- ☐ d) $(1,2,3)$.

Questão 3

Sejam F e H subespaços de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$F = \langle (1,0,0),(1,1,1),(1,2,3) \rangle \text{ e } H = \langle (1,-1,1),(1,0,1) \rangle.$$

Então:

- ☐ a) $\dim(F \cap H) = 0$.
- ☐ b) $\dim(F + H) = 3$.
- ☐ c) $\dim H = 1$.
- ☐ d) $\dim(F + H) = 4$.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questão 4

Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $u = (0, 0, 0, 1), v = (0, 0, 2, 2)$ e $w = (0, 0, -2, 0)$. Então:

- ☐ a) A dimensão de V é 2.
- ☐ b) A sequência $\{u, v, w\}$ é uma base de V.
- ☐ c) u e v são linearmente dependentes.
- ☐ d) $\langle u \rangle = \langle w \rangle$.

Questões de desenvolvimento

Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Se $\{u, v, w\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, então $\{u, u - v, u - w\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) Se $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem os valores próprios 0 e 1 então $A^2 = A$.

III. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2y + z = -8 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

IV. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,1) = (1,0,1)$, $T(1,0,0) = (1,1,2)$ e $T(0,1,2) = (0,0,1)$.

a) Mostre que a sequência $\mathcal{B}' = \{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine a matriz A que representa T em relação à base $\mathcal{B}'$ no espaço de partida e em relação à base canónica no espaço de chegada.

c) Determine a matriz C que representa T em relação à base canónica no espaço de partida e no espaço de chegada.

V. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

a) Determine os valores próprios de A.

b) Determine uma base para cada subespaço próprio de A.

c) Será a matriz A diagonalizável? Justifique a sua resposta.

d) Determine se é possível escrever $D = S^{-1}AS$, onde $S \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível e $D \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ é uma matriz diagonal. Em caso afirmativo determine matrizes S e D nessas condições.

e) Verifique que $A = SDS^{-1}$.

VI. Seja $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $M^2 = -M$. O que pode afirmar sobre o determinante de M? Justifique.

FIM