U.C. 21082
Matemática Finita

6 de julho de 2012

Critérios de avaliação

Questões de Escolha Múltipla:

- Na prova de **Exame**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores.
- No **P-fólio**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões de escolha múltipla é de 0 valores.

Restantes Questões:

- Para a correcção destas questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efectuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizadas afirmações erradas.

Correcção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correcta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

Exame: Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**	**4.**
a)	**b)**	**c)**	**d)**

P-fólio: Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**
b)	**c)**	**d)**

5. (**Exame**: 4.50 valores)

5.1. (**Exame**: 1.20 valores)
Para $n > 1$, a igualdade do enunciado obtém-se por aplicação directa da expressão para um coeficiente binomial. O caso $n = 1$ deve ser estudado separadamente (cf. Fórum de Esclarecimento de Dúvidas (Tema 1), "Chamada de atenção: coeficientes binomiais").

5.2. (**Exame**: 1.50 valores)
Por recurso à mudança de variável $j = n - i$ obtém-se a soma

$$\sum_{i=0}^{n}(i-n)^2 = \sum_{j=0}^{n} j^2$$

que, pela alínea anterior, é igual a

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{2} + \sum_{j=0}^{n}\binom{j+1}{2} = \sum_{j=2}^{n}\binom{j}{2} + \sum_{j=2}^{n+1}\binom{j}{2}.$$

Por aplicação da fórmula de adição do índice superior, seguida da manipulação dos coeficientes binomiais então obtidos, conclui-se que

$$\sum_{i=0}^{n}(i-n)^2 = \sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

5.3. (**Exame**: 1.80 valores)
Questão 20, alínea d, Actividade Formativa 2.

6. (**Exame**: 5.50 valores; **P-fólio**: 4.50 valores[1])

[1] Grupo 4 do P-fólio.

6.1. (**Exame**: 2.0 valores; **P-fólio**: 1.50 valores)
Caso base ($n = 1$): das condições iniciais resulta

$$a_1 - a_0 = 1 - 0 = 1 = (-1)^0 \frac{1}{2^0},$$

o que prova que o caso base verifica-se.
Dado um número natural $n \geq 1$, qualquer, suponhamos, por hipótese de indução de indução, que

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}.$$

Pretende-se, então provar que

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{(tese de indução)}$$

Pela relação de recorrência tem-se

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n),$$

em que, pela hipótese de indução, a última expressão é igual a

$$-\frac{1}{2}\left((-1)^n \frac{1}{2^n}\right) = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Deste modo fica provada a tese de indução.
Pelo método de indução matemática, podemos então concluir que, para qualquer número natural $n \geq 1$, é válida a igualdade

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}.$$

6.2. (**Exame**: 1.80 valores; **P-fólio**: 1.50 valores)
Atendendo à igualdade provada na alínea anterior, resulta da aplicação da lei telescópica que para qualquer número natural $n \geq 1$,

$$a_n = a_n - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{2^k} = -\frac{2}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right).$$

6.3. (**Exame**: 1.70 valores; **P-fólio**: 1.50 valores)
A relação de recorrência do enunciado é equivalente a

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-2}$$

e, portanto, o seu polinómio característico é igual a

$$p(t) = t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Sendo as raízes de p iguais a 1 e a $-1/2$, tem-se então que cada termo a_n será igual a

$$a_n = \alpha \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \beta$$

para

$$\alpha + \beta = a_0 = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha + \beta = a_1 = 1,$$

ou seja, para $\alpha = -\beta = -\frac{2}{3}$.

7. (**Exame**: 2.20 valores; **P-fólio**: 1.50 valores[2])

Exemplo 11, pág. 222 do manual.

Note-se que obtido

$$a_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+2} - 7 \cdot 2^{n+1} + 7\right) \tag{1}$$

há sempre a possibilidade de verificar se o resultado está certo. Com efeito, tem-se para $n = 0$,

$$\frac{1}{2}\left(3^2 - 7 \cdot 2 + 7\right) = 1,$$

coincidente com a condição inicial $a_0 = 1$. Do mesmo modo, para $n = 1$, tem-se

$$\frac{1}{2}\left(3^{1+2} - 7 \cdot 2^2 + 7\right) = 3,$$

igual à condição inicial $a_1 = 3$. Prova-se ainda que (1) verifica a fórmula de recorrência dada no enunciado.

8. (**Exame**: 3.80 valores; **P-fólio**: 3.0 valores[3])

8.1. (**Exame**: 2.20 valores; **P-fólio**: 1.50 valores)

Dadas as séries formais $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ e $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, tem-se

$$A(t)B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

para

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Em particular, para $n = 0$, tem-se $c_0 = a_0 b_0$. Por outro lado, e de acordo com o enunciado,

$$A(t)B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n (n+1) t^{2n+1},$$

o que permite concluir que $c_0 = 0$. Ou seja, $a_0 b_0 = 0$. A verificação pedida segue agora por aplicação da Proposição da pág. 206 do manual.

[2] Pergunta 5 do P-fólio.

[3] Grupo 6 do P-fólio.

8.2. (**Exame**: 1.60 valores; **P-fólio**: 1.50 valores)

Pelas fórmulas gerais indicadas no enunciado, resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n(n+1)t^{2n+1} = t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(4t^2)^n = \frac{t}{(1+4t^2)^2}.$$