UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21037

Elementos de Probabilidades e Estatística

9 de setembro de 2014

- INSTRUÇÕES -

- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- O exame é composto por 4 grupos de questões, contém 2 páginas e termina com a palavra **FIM** e por um formulário de uma página. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- É permitido o uso de máquina de calcular. Não é permitido a utilização de elementos de consulta.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos.**

Critérios de avaliação e cotação:

- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A distribuição da cotação total (20 valores) pelos 4 grupos de questões é a seguinte:

Grupo	1	2	3	4
Cotação	5.0	2.0	7.0	6.0

1. Numa agência de viagens registou-se o número de viagens de avião realizadas por mês pelos seus 237 clientes. Os dados obtidos constam da tabela seguinte:

Quadro I

Nº de viagens	n_i	N_i	F_i
1		39	
2		119	
3	60		
4	29		
5			

(n_i frequência absoluta; N_i frequência absoluta acumulada; F_i frequência relativa acumulada)

1.1. Complete o Quadro I utilizando a informação indicada. Justifique detalhadamente todos os raciocínios e cálculos que efectuar.

1.2. Determine a moda, a média e a mediana do número de viagens aéreas.

1.3. **Utilizando a frequência relativa acumulada**, determine a percentagem de clientes que realizam mensalmente...

1.3.1. ... quatro ou mais viagens.

1.3.2. ... apenas duas viagens.

2. Uma urna contém 80 bolas azuis e 20 bolas amarelas. Retira-se, sem reposição, uma bola ao acaso, anota-se a sua cor e extrai-se uma segunda bola. Repetindo-se este procedimento até à retirada de 20 bolas, determine a probabilidade de entre as 20 bolas extraídas 3 serem amarelas.

3. Considere uma variável aleatória discreta X cuja função de probabilidade é dada por

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0.4	0.1	0.2	0.3

Considere ainda as variáveis aleatórias $Z = X - 1$ e $W = 2X$.

3.1. Calcule $P(Z < 1)$ e $P(2 < W < 5)$.

3.2. Determine o valor esperado de Z.

3.3. Prove que

$$V(W) = 4V(X)$$

e calcule a variância de W.

3.4. Determine as funções de probabilidade e de distribuição de Z.

4. Considere uma variável aleatória contínua X cuja função de distribuição é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ k - \dfrac{27}{x^3}, & x \geq 3 \end{cases}$$

4.1. Determine o valor de k.

4.2. Calcule o valor de:

4.2.1. $P(X < 5)$.

4.2.2. $P(-5 < X \leq 5)$.

4.2.3. $P(X \leq 5 \mid X > -5)$.

4.3. Determine a função densidade de probabilidade de X.

FIM

FORMULÁRIO

Modelos	Expressão das funções de Probabilidade	μ	σ^2
Bernoulli	$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$ $x=0,1$	p	$p(1-p)$
Binomial	$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ $x=0,1,..n$	np	$np(1-p)$
Poisson	$P(X=x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $x=0,1,...$	λ	λ
Uniforme	$P(X=x)=\dfrac{1}{n}$ $\quad x=0,1,...$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Geométrica	$P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$; $x=1,...$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Hipergeométrica	$P(X=x)=\dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n\dfrac{M}{N}$	$n\dfrac{M}{N}\cdot\dfrac{N-M}{N}\cdot\dfrac{N-n}{N-1}$

	Expressão das funções de:		μ	σ^2
Modelos	Densidade	Distribuição		
Exponencial	$f(x)=\lambda\, exp(-\lambda x) \quad x>0$	$F(x)=1-exp(-\lambda x) \quad x>0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Uniforme	$f(x)=\dfrac{1}{b-a} \quad x\in[a,b]$	$F(x)=\dfrac{x-a}{b-a} \quad x\in[a,b[$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$		μ	σ^2