**E-fólio A** | Folha de resolução para E-fólio

**UNIDADE CURRICULAR:** Computação Numérica

**CÓDIGO:** 21180

**DOCENTE:** Paulo Shirley

**A preencher pelo estudante**

**NOME:** Andreia Isabel Teófilo Agostinho Romão

**N.º DE ESTUDANTE:** 1702430

**CURSO:** Licenciatura em Engenharia Informática

**DATA DE ENTREGA:** 07 novembro 2022

**TRABALHO / RESOLUÇÃO:**

**1.1.** [0.75] Considere um cone de altura $h$ e raio da base $r$, cujo volume é dado por

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Determine a expressão que dá o erro absoluto do volume $\epsilon_V$ em função do erro absoluto do raio $\epsilon_r$ e do erro relativo da altura $r_h$, ou seja, $\epsilon_V(\epsilon_r, r_h)$.
Dica: O erro absoluto pode ser expresso em função do erro relativo como $\epsilon_x = \frac{x}{x}\epsilon_x = x r_x$.

1.1) temos que o erro absoluto do valor aproximado de $\bar{x}$ é dado por:

$\varepsilon = |x - \bar{x}|$

e que o erro relativo é dado por:

$r = \frac{\varepsilon}{|x|} = \frac{|x-\bar{x}|}{|x|}$

porém pelo enunciado não sabemos nem o valor exacto de $r$ e $h$ nem o valor de $\bar{r}$ e $\bar{h}$

como é pedido para o erro absoluto do volume ser considerado em função do erro absoluto do raio $(\varepsilon_r)$ e do erro relativo da altura $(r_h)$, ou seja, $\varepsilon_V(\varepsilon_r, r_h)$.

seja

$V = f(r, h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$

e seja a derivada de $r$:

$f'_r = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi h r}{3}$

e seja a derivada de $h$:

$f'_h = \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi r^2}{3}$

temos que ambas as derivadas são ambas contínuas em todo o seu domínio, porque são productos de funções polinomiais e o denominador não se anula, logo são contínuas em $\mathbb{R}$.

então por existir as derivadas $f'_r$ e $f'_h$ e ambas serem contínuas, tem-se pelo teorema de taylor para funções de 2 variáveis, assumindo que $r$ está próximo de $\bar{r}$ e $\bar{h}$ está próximo de $h$:

$\varepsilon_V \approx |f'_r(\bar{r}, \bar{h})|\, \varepsilon_r + |f'_h(\bar{r}, \bar{h})| \cdot \varepsilon_h$ (1)

como nos é pedido para ser expresso em função do erro absoluto relativo da altura $[r_h]$ e temos que o erro absoluto pode ser expresso em função do erro relativo, então podemos reescrever da seguinte forma

$\varepsilon_h = \frac{h}{h}\varepsilon_h = h r_h \approx \bar{h} r_h \Rightarrow$ como $h$ é desconhecido, podemos usar $\bar{h}$

pegando novamente em (1) fica

$\varepsilon_V(\varepsilon_r, r_h) \approx |f'_r(\bar{r}, \bar{h})| \cdot \varepsilon_r + |f'_h(\bar{r}, \bar{h})| \cdot \bar{h} r_h =$

$\varepsilon_V(\varepsilon_r, r_h) \approx \left|\frac{2\pi \bar{h} \bar{r}}{3}\right| \cdot \varepsilon_r + \left|\frac{\pi \bar{r}^2}{3}\right| \cdot \bar{h} r_h$

Como a altura (h) e o raio (r) são distâncias, logo ambos serão $\geq 0$, então podemos retirar o modulo, ficando assim:

$$\varepsilon_V(\varepsilon_r, \varepsilon_h) \simeq \frac{2\pi \bar{h}\bar{r}}{3} \cdot \varepsilon_r + \frac{\pi \bar{r}^2}{3} \cdot \varepsilon_h \quad (2) \quad //$$

Chegando então à expressão solicitada (2)

**1.2.** [1] Suponha que foram efetuadas medidas da altura tendo-se obtido o valor aproximado $\bar{h} = 2$ com precisão $r_h = 0.1\%$. Na medida do raio sabe-se que a precisão é $\epsilon_r = 0.01$. Particularize a expressão da alínea anterior para estes valores para obter a função $\epsilon_V(r)$. Escreva em Octave um script de nome efa22_1.m que faça um gráfico de $\epsilon_V(r)$ para $r \in [0,\ 10]$ com pelo menos 100 pontos, título, legenda e grelha. Inclua o gráfico obtido no relatório.
Dica: utilize o comando "figure(n)" para criar/selecionar previamente a janela em que vai gerar o gráfico.

1.2) Pela alínea anterior temos:

$$\epsilon_V(\epsilon_r, r_h) \approx \frac{2\pi \bar{h}\bar{r}}{3} \cdot \epsilon_r + \frac{\pi \bar{r}^2}{3} \cdot \bar{h} r_h \quad (1)$$

temos pelo enunciado que $r_h = 0{,}1\%$, logo:

$$r_h = 0{,}1\% \Rightarrow \frac{0{,}1}{100} = 0{,}001$$

temos também pelo enunciado que $\bar{h} = 2$, e que $\epsilon_r = 0{,}01$, então alterando os valores dados pelo enunciado na expressão (1) ficamos com:

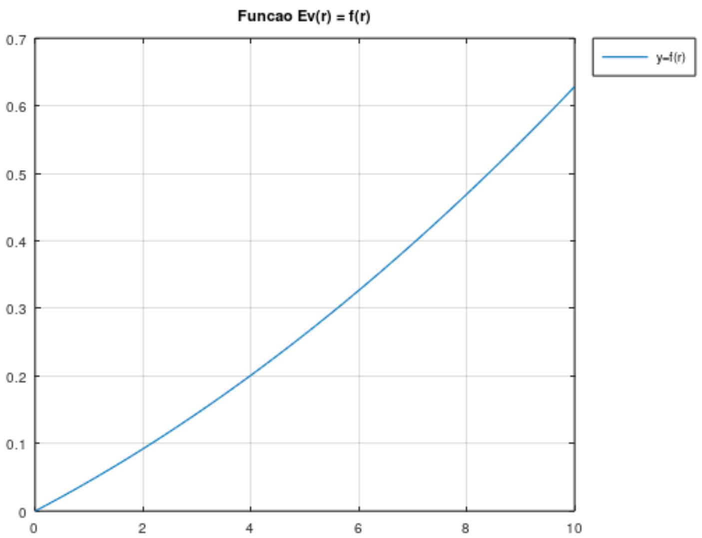
$$\epsilon_V(\bar{r}) \approx \frac{2\pi \cdot 2\bar{r}}{3} \cdot 0{,}01 + \frac{\pi \bar{r}^2}{3} \cdot 2 \cdot 0{,}001$$

Neste caso não sabemos se temos o valor aproximado ou o exacto de $r$, então iremos usar a notação de $r$ e não de $\bar{r}$

$$(\Rightarrow) \epsilon_V(r) \approx \frac{0{,}04 \cdot \pi}{3} \cdot r + \frac{0{,}002}{3} \cdot \pi r^2 \quad (2)$$

Ficheiro *efa22_1.m* incluído no ficheiro zip.

Print do gráfico pedido:



**1.3.** [1] Pretende-se determinar o intervalo $r \in [0,\ r_{max}]$ tal que $\epsilon_V(r) \leq \epsilon_{max}$ com $\epsilon_{max} = 0.3$, utilizando o método do ponto fixo. Proponha uma função iteradora $f(r)$ e mostre que é apropriada para a aplicação do método do ponto fixo à determinação da solução da equação $\epsilon_V(r) = \epsilon_{max}$.
Nota: Não devem ser utilizadas fórmulas resolventes polinomiais.

1.3) $\varepsilon_V(r) \leq \varepsilon_{max} = 0{,}3$ c/ $r \in [0, r_{max}]$

Segundo o teorema do ponto fixo 1.7.1, obtemos uma aproximação da solução para a eq $f(x) = x$ se $f: [a,b] \to [a,b]$, uma função diferenciável em $[a,b]$ e tal que

$$\max_{x \in [a,b]} |f'(x)| \leq L < 1$$

então temos:

$$\varepsilon_V(r) = \varepsilon_{max} = 0{,}3$$

Pela formula (2) obtida na alinea anterior ficamos com

$$\frac{0{,}04\pi}{3} \cdot r + \frac{0{,}002}{3} \cdot \pi r^2 = 0{,}3$$

$$r\left(\frac{0{,}04\pi}{3} + \frac{0{,}002}{3} \cdot \pi \cdot r\right) = 0{,}3$$

$$r = \left(\frac{0{,}3}{\frac{0{,}04\pi}{3} + \frac{0{,}002}{3} \cdot \pi \cdot r}\right) \Leftrightarrow r = \frac{0{,}9}{0{,}04\pi + 0{,}002 \cdot \pi r}$$

chegamos então à função iteradora, ou seja,

$$f(r) = \frac{0{,}9}{0{,}04\pi + 0{,}002 \cdot \pi r} \quad (3)$$ , onde $0{,}04\pi + 0{,}002 \cdot \pi r = 0 \Leftrightarrow r = -20$

Para a função iteradora (3) ser valida tem que se garantir que satisfaz os critérios do teorema 1.7.1
→ $f(r)$ é uma função racional diferenciavel e como dominio de $f$ é $\mathbb{R} / \{-20\}$
Calculando a derivada

$$f'(r) = \left(\frac{0{,}9}{0{,}04\pi + 0{,}002 \cdot \pi r}\right)' = \frac{0 - 0{,}9 \cdot 0{,}002\pi}{(0{,}04\pi + 0{,}002 \cdot \pi \cdot r)^2} = \frac{-0{,}0018 \cdot \pi}{(0{,}04\pi + 0{,}002 \cdot \pi\, r)^2}$$

$$\max_{r \in [0, r_{max}]} |f'(r)| = \max_{r \in [0, r_{max}]} \left| \frac{-0{,}0018 \cdot \pi}{(0{,}04\pi + 0{,}002 \cdot \pi \cdot r)^2} \right|$$

O maximo de uma fração é quando o denominador for o menor possivel, aqui temos que o valor maximo que a função toma é quando o $r = 0$
então temos

$$\frac{0{,}0018 \cdot \pi}{(0{,}04\pi + 0{,}002 \cdot \pi \cdot 0)^2} = \frac{0{,}0018 \cdot \pi}{0{,}04 \cdot \pi} \simeq 0{,}045$$

temos então que $L = 0{,}045$
Como

$$\max_{r \in [0, r_{max}]} |f'(r)| \leq L < 1 \Leftrightarrow \max_{r \in [0, r_{max}]} |f'(r)| \leq 0{,}045 < 1$$

concluindo que cumpre os requisitos do teorema do ponto fixo

**1.4.** [1.25] Escreva em Octave um script de nome efa22_2.m que calcule uma estimativa de $r_{max}$ com pelo menos 5 algarismos significativos utilizando o método do ponto fixo com a estimativa inicial $r_0 = 0.1$. O script deve apresentar uma tabela com as iterações, indicando em cada linha o número da iteração, o valor da estimativa e o valor do erro absoluto associado. Inclua a tabela obtida no relatório.

Nota: Para a iteração $k$, não deve ser confundida a diferença $|r_k - r_{k-1}|$ com o erro absoluto $|r_{max} - r_k|$. Utilize a equação (1.24) da pág. 44 do manual, termo do meio, para os relacionar.

Ficheiros *efa22_2.m* e *pontofixo.m* (reutilização do ficheiro *alg12_pontofixo.m* com alterações para a utilização neste exercício) incluídos no ficheiro zip

Output:

```
------- Método do ponto fixo ------- dx<=5.00e-05
  k          xk              dx
  0     0.100000000000000
  1     7.126340735458000   3.31e-01
  2     5.280456003248214   8.70e-02
  3     5.666015231857423   1.82e-02
  4     5.580899391227382   4.01e-03
  5     5.599468829928154   8.75e-04
  6     5.595407066229656   1.91e-04
  7     5.596295007618559   4.18e-05
```