U.C. 21082
Matemática Finita

9 de junho de 2017

Critérios de avaliação

Questões de Escolha Múltipla:

- Na prova de **Exame**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores.
- No **P-fólio**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões de escolha múltipla é de 0 valores.

Restantes Questões:

- Para a correcção destas questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efectuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizadas afirmações erradas.

Correcção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correcta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

Exame: Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**	**4.**
a)	b)	d)	b)

P-fólio: Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**
b)	d)	b)

5. (**Exame**: 4.0 valores)

5.1. (**Exame**: 1.0 valor)

Um número é divisível por 9 se, e só se, é da forma $9k$, $k \in \mathbb{N}$. Logo, procura-se o número de elementos $k \in \{1, 2, \ldots\}$ tais que

$$9 \leq 9k \leq 100,$$

que é equivalente a $1 \leq k < \frac{100}{9}$. Existem, assim, 11 números entre 1 e 100, inclusive, que são divisíveis por 9.

5.2. (**Exame**: 1.50 valor)

Uma vez que 100 não é divisível por 100, mas 99 é-o, temos que nos concentrar nos números naturais $1 \leq N \leq 99$. Atendendo ao critério de divisibilidade por 9 descrito, os números N procurados são assim da forma $N = (x_1x_2)_{10}$ com $x_1 + x_2$ divisível por 9. Dois casos podem então acontecer: ou $x_1 + x_2 = 18$, o que acontece apenas para $N = 99$, ou $x_1 + x_2 = 9$. Neste último caso, o problema é idêntico ao da pág. 67 do manual. Pelo mesmo raciocínio conclui-se que existem

$$\binom{9+2-1}{9} = 10$$

diferentes soluções da equação $x_1+x_2 = 9$. No total, existem assim 11 números entre 1 e 100 divisíveis por 9.

5.3. (**Exame e P-fólio**[1]: 1.50 valor)

Considerem-se os conjuntos

$$A = \{n \in [100] : n \text{ é divisível por } 9\}, B = \{n \in [100] : n \text{ é divisível por } 5\}.$$

Pretende-se determinar $\#(A \cup B)$.

Pelas alíneas anteriores, tem-se que $\#A = 11$ e um raciocínio semelhante ao realizado na alínea 5.1 permite concluir que $\#B = 20$. Como $A \cap B \neq \emptyset$, há que calcular o número de elementos do conjunto $A \cap B$, ou seja, o número de

[1]Pergunta 4 do P-fólio.

naturais entre 1 e 100 que são divisíveis por 9 e por 5. Isto corresponde a determinar o número de elementos $k \in \{1, 2, \ldots\}$ tais que

$$45 \leq 45k \leq 100 \Longleftrightarrow 1 \leq k < \frac{100}{45}.$$

Pelo princípio da inclusão/exclusão tem-se então

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) = 11 + 20 - 2 = 29.$$

6. (**Exame**: 2.0 valores)

Pela fórmula da extracção têm-se

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1},$$

onde

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1} = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1} &= -\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} \\ &= -\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} + 1.\end{aligned}$$

Pela fórmula binomial resulta então

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} = (1-1)^{n+1},$$

o qual é igual a 0, porque $n + 1 > 0$. Consequentemente,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

7. (**Exame**: 3.30 valores)

Note-se que $a \equiv b \pmod 2$ é equivalente a $2 \mid (a - b)$.

7.1. (**Exame**: 1.80 valor; **P-fólio**[2]: 1.50 valor)

Suponhamos que a é um número par. Pretende-se provar que b é também um número par, o que resulta por linearidade:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \mid (a-b) \\ 2 \mid a \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 \mid \underbrace{-(a-b)+a}_{=b}$$

Do mesmo modo se prova que se b é um número par, então também o a é um número par.

Suponhamos agora que a é um número ímpar. Com vista a um absurdo, suponhamos que b é par. Nesta situação, pelos cálculos anteriores ter-se-ía que a também seria um número par, o que é um absurdo. O absurdo resultou de se ter assumido no início que b é um número par. Logo, o número b tem de ser ímpar.

[2]Pergunta 5 do P-fólio.

7.2. (**Exame**: 1.50 valor)

Se $\text{mdc}(b, 2) = 1$, então o 2 não é um divisor de b. Logo b é um número ímpar. Como $a \equiv b \pmod 2$, resulta então da alínea anterior que a também é um número ímpar, pelo que o 2 não é divisor de a. Logo, $\text{mdc}(a, 2) = 1$, ou seja, a e 2 são números primos entre si.

8. (**Exame**: 1.70 valores; **P-fólio**[3]: 1.50 valor)

Como $14 = 2 \times 7$, em que 2 e 7 são dois números primos, para verificar a irredutibilidade da fracção dada basta verificar que o 2 e o 7 não dividem o numerador. Como o algarismo das unidades de 72683 é diferente de 0, 2, 4, 6, ou de 8, 72683 não é divisível por 2. Também não é divisível por 7, pois pelo critério de divisibilidade por 7 (Pergunta 4 da folha de exercícios sobre Congruências) tem-se

$$\begin{aligned} &7268 - 2 \times 3 = 7262 \\ &726 - 2 \times 2 = 722 \\ &72 - 2 \times 2 = 68 \\ &6 - 2 \times 8 = -10 \end{aligned}$$

em que -10 não é divisível por 7 ($-10 = 7 \times (-2) + 4$). Deste modo conclui-se que $7 \nmid 72683$.

9. (**Exame**: 5.0 valores; **P-fólio**[4]: 4.50 valores)

9.1. (**Exame e P-fólio**: 1.50 valor)

Dada a relação de recorrência

$$a_n = 12a_{n-1} - 35a_{n-2},$$

o polinómio característico correspondente é igual a

$$p(t) = t^2 - 12t + 35.$$

Sendo as raízes de p iguais a 5 e a 7, tem-se então que cada termo a_n da solução geral é igual a

$$a_n = \alpha 5^n + \beta 7^n$$

para

$$\alpha + \beta = a_0 = 0, \quad 5\alpha + 7\beta = a_1 = 2,$$

ou seja, para $\alpha = -\beta = -1$.

9.2. (**Exame**: 1.90 valor; **P-fólio**: 1.50 valor)

Case Base: $\mathbf{n = 0}$. Neste caso tem-se $a_1 + 2 \cdot 5^1 = 2 + 10 = 12$ que é um múltiplo de 3. O caso base fica assim provado.

Hipótese de indução: Dado $n \in \mathbb{N}$, **qualquer**, suponhamos que 3 é um divisor de

$$a_{2n+1} + 2 \cdot 5^{2n+1} = 7^{2n+1} + 5^{2n+1}.$$

[3]Pergunta 6 do P-fólio.

[4]Grupo 7 do P-fólio.

Tese de indução: 3 é um divisor de

$$a_{2(n+1)+1} + 2 \cdot 5^{2(n+1)+1} = 7^{2n+3} + 5^{2n+3}.$$

Uma vez que

$$7^{2n+3} + 5^{2n+3} = 7^2(7^{2n+1} + 5^{2n+1}) - 5^{2n+1}(7^2 - 5^2)$$

em que, pela hipótese de indução, 3 é um divisor de $7^{2n+1} + 5^{2n+1}$ e 3 é um divisor de $7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$, tem-se que 3 é um divisor de $7^{2n+3} + 5^{2n+3}$, o que prova a tese de indução.

Pelo método de indução matemática, fica assim provado que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, 3 é um divisor de $a_{2n+1} + 2 \cdot 5^{2n+1}$.

9.3. (**Exame**: 1.60 valor; **P-fólio**: 1.50 valor)

Como 5 é um número primo, resulta do Lema 1.11 alínea 1 do Texto sobre Divisibilidade que para cada $n \in \{1, 2, \ldots\}$, fixo, $\mathrm{mdc}(a_n, 5) = m$ para $m = 1$ ou $m = 5$. Suponhamos que $m = 5$. Isto significa, em particular, que $5 \mid a_n$. Por linearidade tem-se então

$$5 \mid a_n \ \wedge 5 \mid 5^n \implies 5 \mid \underbrace{(a_n + 5^n)}_{=7^n},$$

o que é um absurdo. Com feito, sendo 7 um número primo, 7^n é uma factorização em números primos e, portanto, os únicos divisores de 7^n são da forma 7^k para $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Conclusão: $m = 1$.