U.C. 21076

Investigação Operacional

27 de junho de 2016

-- INSTRUÇÕES –

- O tempo de duração da prova de exame é de 2 horas, acrescida de 30 minutos de tolerância.
- Deverá responder a todas as questões na folha de ponto, preencher todos os cabeçalhos e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível. Após a prova, o enunciado pode ficar na posse do estudante.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas.
- Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize unicamente tinta de cor azul ou preta.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- A prova é constituída por **4 páginas** (incluindo formulário e tabela da distribuição normal padrão) e termina com a palavra **FIM**. O exame contém **4 grupos** de questões.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- **É permitida** a utilização de máquina de calcular.
- Nas questões que envolvam cálculos ou demonstrações o estudante deve explicitar e justificar todos os passos necessários.
- Em anexo são fornecidos formulário e tabela da distribuição normal padrão.
- Os grupos de questões terão as seguintes cotações:

1.	**2.**	**3.**	**4.**
5 val.	**5 val.**	**5 val.**	**5 val.**

1. Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\max\ F = 4X_A + 2X_B$$

$$\text{sujeito a:}\quad \begin{aligned} 2X_A + X_B &\le 10 \\ X_A &\le 4 \\ X_B &\le 8 \\ X_A, X_B &\ge 0 \end{aligned}$$

a) Transforme as restrições em igualdades através da introdução de variáveis de folga.

b) Escreva o problema na "forma standard**".**

c) Obtenha a solução óptima usando o Algoritmo Simplex.

d) A solução que encontrou na alínea anterior é única? De que forma é que o último quadro do simplex pode auxiliar a identificar esta questão?

e) Confirme os resultados anteriores através do método gráfico.

2. Numa loja de uma operadora de comunicações, o atendimento ao público é feito por três funcionários e, apesar dos serviços por eles prestados serem muito diversificados, pode considerar-se que o tempo de atendimento segue uma distribuição exponencial negativa com uma média de 8 minutos. Sabendo-se que a chegada de clientes constituem um processo de Poisson com uma taxa de 12 clientes por hora:

a) Qual a probabilidade de não haver clientes à espera de serem atendidos?

b) Qual o comprimento médio da fila de espera?

c) Qual o tempo médio de espera na fila?

d) Qual a probabilidade de que um cliente esteja mais do que 5 minutos na loja?

3. Considere um empreendimento caracterizado pelas atividades, precedências e durações indicadas no seguinte quadro:

Atividades	**Precedências**	**Duração (dias)**	
		μ	σ
A	-	6	2
B	-	10	3
C	A,B	8	1
D	B	***x***	1
E	C,D	5	2
F	E	7	1

a) Trace a rede que representa o empreendimento.

b) Determine o caminho crítico do empreendimento em função da duração (***x***) da atividade D. Justifique.

c) Admita agora que a duração da atividade D é de 3 dias. Recorrendo à técnica PERT, calcule a probabilidade da duração total ser superior a 28 dias.

4. Considere o seguinte jogo aleatório:

Em cada jogada, duas rodas giratórias constituídas por várias cores são postas a girar pelo custo de 40 u.m.. O jogo termina quando as cores saídas nas duas rodas forem iguais, recebendo o jogador um prémio de acordo com o indicado na tabela seguinte:

Cor	**Branco**	**Azul**	**Vermelho**
Prémio (u.m.)	150	400	250

As cores distribuem-se nas duas rodas da seguinte maneira:

<u>Roda 1</u>: 10 partes brancas, 30 partes azuis, 40 partes verdes e 20 partes vermelhas.

<u>Roda 2</u>: 50 partes brancas, 20 partes azuis, 20 partes vermelhas e 10 partes pretas.

Admita que à invocação da rotina RANDOM é afectado um NPA Unif [0,1] à variável U

a) Elabore uma rotina que proceda à geração da cor que sai na Roda 2.

b) Elabore uma rotina que proceda à geração de uma jogada.

c) Elabore um modelo simplificado de simulação que permita estudar a distribuição do ganho associado a este jogo.

Formulário de Filas de Espera

Sistema M/M/*S*, População = ∞ ; Fila máxima = ∞

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de **λ** clientes por unidade de tempo.
Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de **μ** clientes por unidade de tempo por cada um dos ***S*** **servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 0,1,\ldots,S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** $\rho = \lambda / (S\mu)$ $(\rho < 1)$
Taxa de **desocupação** $= 1 - \rho$

$$L = L_q + \lambda / \mu$$

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2}$$

$$W = W_q + 1/\mu = L/\lambda$$

$$W_q = L_q / \lambda$$

$$P_0 = \left[\frac{S^S \rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{S} \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1,\ldots,S \\ \dfrac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n \geq S+1, \end{cases}$$

$$\mathrm{P}(W > t) = e^{-\mu t}\left[1 + \frac{(S\rho)^S P_0 \left(1 - e^{-\mu t(S-1-S\rho)}\right)}{S!(1-\rho)(S-1-S\rho)}\right] \quad \text{para } t \geq 0$$

$$\mathrm{P}(W_q > t) = \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^{-S\mu t(1-\rho)} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$\mathrm{P}(W_q = 0) = 1 - \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)}$$

Distribuição Normal Padrão **D(Z)=P(-z<Z<z) ; Φ(Z)=P(Z<z)**

Z	Φ(-Z)	Φ(Z)	D(Z)
0,01	0,4960	0,5040	0,0080
0,02	0,4920	0,5080	0,0160
0,03	0,4880	0,5120	0,0239
0,04	0,4840	0,5160	0,0319
0,05	0,4801	0,5199	0,0399
0,06	0,4761	0,5239	0,0478
0,07	0,4721	0,5279	0,0558
0,08	0,4681	0,5319	0,0638
0,09	0,4641	0,5359	0,0717
0,1	0,4602	0,5398	0,0797
0,11	0,4562	0,5438	0,0876
0,12	0,4522	0,5478	0,0955
0,13	0,4483	0,5517	0,1034
0,14	0,4443	0,5557	0,1113
0,15	0,4404	0,5596	0,1192
0,16	0,4364	0,5636	0,1271
0,17	0,4325	0,5675	0,1350
0,18	0,4286	0,5714	0,1428
0,19	0,4247	0,5753	0,1507
0,2	0,4207	0,5793	0,1585
0,21	0,4168	0,5832	0,1663
0,22	0,4129	0,5871	0,1741
0,23	0,4090	0,5910	0,1819
0,24	0,4052	0,5948	0,1897
0,25	0,4013	0,5987	0,1974
0,26	0,3974	0,6026	0,2051
0,27	0,3936	0,6064	0,2128
0,28	0,3897	0,6103	0,2205
0,29	0,3859	0,6141	0,2282
0,3	0,3821	0,6179	0,2358
0,31	0,3783	0,6217	0,2434
0,32	0,3745	0,6255	0,2510
0,33	0,3707	0,6293	0,2586
0,34	0,3669	0,6331	0,2661
0,35	0,3632	0,6368	0,2737
0,36	0,3594	0,6406	0,2812
0,37	0,3557	0,6443	0,2886
0,38	0,3520	0,6480	0,2961
0,39	0,3483	0,6517	0,3035
0,4	0,3446	0,6554	0,3108
0,41	0,3409	0,6591	0,3182
0,42	0,3372	0,6628	0,3255
0,43	0,3336	0,664	0,3328
0,44	0,3300	0,6700	0,3401
0,45	0,3264	0,6736	0,3473
0,46	0,3228	0,6772	0,3545
0,47	0,3192	0,6808	0,3616
0,48	0,3156	0,6844	0,3688
0,49	0,3121	0,6879	0,3759
0,5	0,3085	0,6915	0,3829
0,51	0,3050	0,6950	0,3899
0,52	0,3015	0,6985	0,3969
0,53	0,2981	0,7019	0,4039
0,54	0,2946	0,7054	0,4108
0,55	0,2912	0,7088	0,4177
0,56	0,2877	0,7123	0,4245
0,57	0,2843	0,7157	0,4313
0,58	0,2810	0,7190	0,4381
0,59	0,2776	0,7224	0,448
0,6	0,2743	0,7257	0,4515
0,61	0,2709	0,7291	0,4581
0,62	0,2676	0,7324	0,4647
0,63	0,2643	0,7357	0,4713
0,64	0,2611	0,7389	0,4778
0,65	0,2578	0,7422	0,4843
0,66	0,2546	0,7454	0,4907
0,67	0,2514	0,7486	0,4971
0,68	0,2483	0,7517	0,5035
0,69	0,2451	0,7549	0,5098
0,7	0,2420	0,7580	0,5161
0,71	0,2389	0,7611	0,5223
0,72	0,2358	0,7642	0,5285
0,73	0,2327	0,7673	0,5346
0,74	0,2296	0,7704	0,5407
0,75	0,2266	0,7734	0,5487

Z	Φ(-Z)	Φ(Z)	D(Z)
0,76	0,2236	0,7764	0,5527
0,77	0,2206	0,7794	0,5587
0,78	0,2177	0,7823	0,5646
0,79	0,2148	0,7852	0,5705
0,8	0,2119	0,7881	0,5763
0,81	0,2090	0,7910	0,5821
0,82	0,2061	0,7939	0,5878
0,83	0,2033	0,7967	0,5935
0,84	0,2005	0,7995	0,5991
0,85	0,1977	0,8023	0,6047
0,86	0,1949	0,8051	0,6102
0,87	0,1922	0,8078	0,6157
0,88	0,1894	0,8106	0,6211
0,89	0,1867	0,8133	0,6265
0,9	0,1841	0,8159	0,6319
0,91	0,1814	0,8186	0,6372
0,92	0,1788	0,8212	0,6424
0,93	0,1762	0,8238	0,6476
0,94	0,1736	0,8264	0,6528
0,95	0,1711	0,8289	0,6579
0,96	0,1685	0,8315	0,6629
0,97	0,1660	0,8340	0,6680
0,98	0,1635	0,8365	0,6729
0,99	0,1611	0,8389	0,6778
1	0,1587	0,8413	0,6827
1,01	0,1562	0,8438	0,6875
1,02	0,1539	0,8461	0,6923
1,03	0,1515	0,8485	0,6970
1,04	0,1492	0,8508	0,7017
1,05	0,1469	0,8531	0,7063
1,06	0,1446	0,8554	0,7109
1,07	0,1423	0,8577	0,7154
1,08	0,1401	0,8599	0,7199
1,09	0,1379	0,8621	0,7243
1,1	0,1357	0,8643	0,7287
1,11	0,1335	0,8665	0,7330
1,12	0,1314	0,8686	0,7373
1,13	0,1292	0,8707	0,7415
1,14	0,1271	0,8729	0,7457
1,15	0,1251	0,8749	0,7499
1,16	0,1230	0,8770	0,7540
1,17	0,1210	0,8790	0,7580
1,18	0,1190	0,8810	0,7620
1,19	0,1170	0,8830	0,7660
1,2	0,1151	0,8849	0,7699
1,21	0,1131	0,8869	0,7737
1,22	0,1112	0,8888	0,7775
1,23	0,1093	0,8907	0,7813
1,24	0,1075	0,8925	0,7850
1,25	0,1056	0,8944	0,7887
1,26	0,1038	0,8962	0,7923
1,27	0,1020	0,8980	0,7959
1,28	0,1003	0,8997	0,7995
1,29	0,0985	0,9015	0,8029
1,3	0,0968	0,9032	0,8064
1,31	0,0951	0,9049	0,8098
1,32	0,0934	0,9066	0,8132
1,33	0,0918	0,9082	0,8165
1,34	0,0901	0,9099	0,8198
1,35	0,0885	0,9115	0,8230
1,36	0,0869	0,9131	0,8262
1,37	0,0853	0,9147	0,8293
1,38	0,08938	0,9162	0,8324
1,39	0,0823	0,9177	0,8355
1,4	0,0808	0,9192	0,8385
1,41	0,0793	0,9207	0,8415
1,42	0,0778	0,9222	0,8444
1,43	0,0764	0,9236	0,8473
1,44	0,0749	0,9251	0,8501
1,45	0,0735	0,9265	0,8529
1,46	0,0721	0,9279	0,8557
1,47	0,0708	0,9292	0,8584
1,48	0,0694	0,9306	0,8611
1,49	0,0681	0,9319	0,8638
1,5	0,0668	0,9332	0,8664

Z	Φ(-Z)	Φ(Z)	D(Z)
1,51	0,0655	0,9345	0,8690
1,52	0,0643	0,9357	0,8715
1,53	0,0630	0,9370	0,8740
1,54	0,0618	0,9382	0,8764
1,55	0,0606	0,9394	0,8789
1,56	0,0594	0,9406	0,8812
1,57	0,0582	0,9418	0,8836
1,58	0,0571	0,9429	0,8859
1,59	0,0559	0,9441	0,8882
1,6	0,0548	0,9452	0,8904
1,61	0,0537	0,9463	0,8926
1,62	0,0526	0,9474	0,8948
1,63	0,0516	0,9484	0,8969
1,64	0,0505	0,9495	0,8990
1,65	0,0495	0,9505	0,9011
1,66	0,0485	0,9515	0,9031
1,67	0,0475	0,9525	0,9051
1,68	0,0465	0,9535	0,9070
1,69	0,0455	0,9545	0,9090
1,7	0,0466	0,9554	0,9109
1,71	0,0436	0,9564	0,9127
1,72	0,0427	0,9573	0,9146
1,73	0,0418	0,9582	0,9164
1,74	0,0409	0,9591	0,9181
1,75	0,0401	0,9599	0,9199
1,76	0,0392	0,9608	0,9216
1,77	0,0384	0,9616	0,9233
1,78	0,0375	0,9625	0,9249
1,79	0,0367	0,9633	0,9265
1,8	0,0359	0,9641	0,9281
1,81	0,0351	0,9649	0,9297
1,82	0,0344	0,9656	0,9312
1,83	0,0336	0,9664	0,9328
1,84	0,0329	0,9671	0,9342
1,85	0,0322	0,9678	0,9357
1,86	0,0314	0,9686	0,9371
1,87	0,0307	0,9693	0,9385
1,88	0,0301	0,9699	0,9399
1,89	0,0294	0,9706	0,9412
1,9	0,0287	0,9713	0,9426
1,91	0,0281	0,9719	0,9439
1,92	0,0274	0,9726	0,9451
1,93	0,0268	0,9732	0,9464
1,94	0,0262	0,9738	0,9476
1,95	0,0256	0,9744	0,9488
1,96	0,0250	0,9750	0,9500
1,97	0,0244	0,9756	0,9512
1,98	0,0239	0,9761	0,9523
1,99	0,0233	0,9767	0,9534
2	0,0228	0,9772	0,9545
2,01	0,0222	0,9778	0,9556
2,02	0,0217	0,9783	0,9566
2,03	0,0212	0,9788	0,9576
2,04	0,0207	0,9793	0,9586
2,05	0,0202	0,9798	0,9596
2,06	0,0197	0,9803	0,9606
2,07	0,0192	0,9808	0,9615
2,08	0,0188	0,9812	0,9625
2,09	0,0183	0,9817	0,9634
2,1	0,0179	0,9821	0,9643
2,11	0,0174	0,9826	0,9651
2,12	0,0170	0,9830	0,9660
2,13	0,0166	0,9834	0,9668
2,14	0,0162	0,9838	0,9676
2,15	0,0158	0,9842	0,9684
2,16	0,0154	0,9846	0,9692
2,17	0,0150	0,9850	0,9700
2,18	0,0146	0,9854	0,9707
2,19	0,0143	0,9857	0,9715
2,2	0,0139	0,9861	0,9722
2,21	0,0136	0,9864	0,9729
2,22	0,0132	0,9868	0,9736
2,23	0,0129	0,9871	0,9743
2,24	0,0125	0,9875	0,9749
2,25	0,0122	0,9878	0,9756

Z	Φ(-Z)	Φ(Z)	D(Z)
2,26	0,0119	0,9881	0,9762
2,27	0,0116	0,9884	0,9768
2,28	0,0113	0,9887	0,9774
2,29	0,0110	0,9890	0,9780
2,3	0,0107	0,9893	0,9786
2,31	0,0104	0,9896	0,9791
2,32	0,0102	0,9898	0,9797
2,33	0,0099	0,9901	0,9802
2,34	0,0096	0,9904	0,9807
2,35	0,0094	0,9906	0,9812
2,36	0,0091	0,9909	0,9817
2,37	0,0089	0,9911	0,9822
2,38	0,0087	0,9913	0,9827
2,39	0,0084	0,9916	0,9832
2,4	0,0082	0,9918	0,9836
2,41	0,0080	0,9920	0,9840
2,42	0,0078	0,9922	0,9845
2,43	0,0075	0,9925	0,9849
2,44	0,0073	0,9927	0,9853
2,45	0,0071	0,9929	0,9857
2,46	0,0069	0,9931	0,9861
2,47	0,0068	0,9932	0,3865
2,48	0,0066	0,9934	0,3869
2,49	0,0064	0,9936	0,9872
2,5	0,0062	0,9938	0,9876
2,51	0,0060	0,9940	0,9879
2,52	0,0059	0,9941	0,9883
2,53	0,0057	0,9943	0,9886
2,54	0,0055	0,9945	0,9889
2,55	0,0054	0,9946	0,9892
2,56	0,0052	0,9948	0,9895
2,57	0,0051	0,9949	0,9898
2,58	0,0049	0,9951	0,9901
2,59	0,0048	0,9952	0,9904
2,6	0,0047	0,9953	0,9907
2,61	0,0045	0,9955	0,9909
2,62	0,0044	0,9956	0,9912
2,63	0,0043	0,9957	0,9915
2,64	0,0041	0,9959	0,9917
2,65	0,0040	0,9960	0,9920
2,66	0,0039	0,9961	0,9922
2,67	0,0038	0,9962	0,9924
2,68	0,0037	0,9963	0,9926
2,69	0,0036	0,9964	0,9929
2,7	0,0035	0,9965	0,9931
2,71	0,0034	0,9966	0,9933
2,72	0,0033	0,9967	0,9935
2,73	0,0032	0,9968	0,9937
2,74	0,0031	0,9969	0,9939
2,75	0,0030	0,9970	0,9940
2,76	0,0029	0,9971	0,9942
2,77	0,0028	0,9972	0,9944
2,78	0,0027	0,9973	0,9946
2,79	0,0026	0,9974	0,9947
2,8	0,0026	0,9974	0,9949
2,81	0,0025	0,9975	0,9950
2,82	0,0024	0,9976	0,9952
2,83	0,0023	0,9977	0,9953
2,84	0,0023	0,9977	0,9955
2,85	0,0022	0,9978	0,9956
2,86	0,0021	0,9979	0,9958
2,87	0,0021	0,9979	0,9959
2,88	0,0020	0,9980	0,9960
2,89	0,0019	0,9981	0,9961
2,9	0,0019	0,9981	0,9963
2,91	0,0018	0,9982	0,9964
2,92	0,0018	0,9982	0,9965
2,93	0,0017	0,9983	0,9966
2,94	0,0016	0,9984	0,9967
2,95	0,0016	0,9984	0,9968
2,96	0,0015	0,9985	0,9969
2,97	0,0015	0,9985	0,9970
2,98	0,0014	0,9986	0,9971
2,99	0,0014	0,9986	0,9972
3	0,0013	0,9987	0,9973

FIM