Correcção Sumária

Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**
d)	**c)**	**b)**

4. Atendendo a que $B \subseteq \mathbb{Q}$ em que $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, tem-se que $B \times \mathbb{Q}$ é enumerável, cf. Exemplo 7, pág. 81, do Manual. Assim e pelo Exemplo 4 da mesma referência, X é enumerável.

5.

5.1. Nesta alínea pretende-se determinar a cardinalidade do conjunto $A \cup B$ com

$$A := \{(6,6,z) : z \in \{7,8,9\}\} \tag{1}$$

e

$$B := \{(6,y,z) : y \in \{7,8,9\}, z \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{6\}\}. \tag{2}$$

Como $\#A = \#\{7,8,9\} = 3$ e, pela segunda Proposição da pág. 25 do Manual, $\#B = \#\{7,8,9\} \times \#\{0,1,2,3,4,5,7,8,9\} = 3 \times 9 = 27$ com $A \cap B = \emptyset$, resulta que

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B = 3 + 27 = 30.$$

5.2. Designando por C o conjunto dos números nas condições do enunciado, considerem-se os conjuntos

$$\begin{aligned}
C_6 &:= A \cup B, \\
C_7 &:= \{(7,y,z) : y \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, z \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{7\}\}, \\
C_8 &:= \{(8,y,z) : y \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, z \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{8\}\}, \\
C_9 &:= \{(9,y,z) : y \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, z \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{9\}\},
\end{aligned}$$

em que A e B são os conjuntos definidos por, respectivamente, (1) e (2). Tem-se que os conjuntos C_6, C_7, C_8 e C_9 são disjuntos dois a dois e $C = C_6 \cup C_7 \cup C_8 \cup C_9$. Consequentemente,

$$\#C = \#C_6 + \#C_7 + \#C_8 + \#C_9,$$

em que, novamente pela segunda Proposição da pág. 25 do Manual,

$$\#C_i = 10 \times 9 = 90, \quad i = 7,8,9.$$

Assim sendo e atendendo à alínea anterior, tem-se que $\#C = 30 + 3 \times 90 = 300$.

6.

6.1. Case Base: $\mathbf{n = 1}$. Neste caso tem-se

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 \binom{1}{k} = 1^2 \binom{1}{1} = 1 = 2 \cdot 2^{-1} = 1(1+1)2^{1-2},$$

o que prova o caso base.

Hipótese de indução: Dado $n \in \{1, 2, \ldots\}$, **qualquer**, suponhamos que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Tese de indução:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \binom{n+1}{k} = (n+1)(n+2)2^{n-1}.$$

Para se provar a tese de indução note-se que, pela lei de Pascal,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n+1}{k} + (n+1)^2 \binom{n+1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) + (n+1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k-1} + (n+1)^2,
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k-1} + (n+1)^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 \binom{n}{k} + (n+1)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \binom{n+1}{k} = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Relativamente à segunda soma que surge no lado direito da última igualdade, note que pela fórmula da extracção ela é igual a

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}. \tag{3}$$

Assim sendo, tem-se que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \binom{n+1}{k} = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} + 2n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

e, portanto, pela hipótese de indução e pelo Binómio de Newton,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \binom{n+1}{k} = 2n(n+1)2^{n-2} + 2n \cdot 2^{n-1} + 2^n = (n+2)(n+1)2^{n-1}.$$

Pelo método de indução matemática, fica assim provado que para qualquer $n \in \{1, 2, \ldots\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

6.2. Com vista à aplicação da fórmula da extracção, observe-se que

$$R(n,3) = \sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n}{k}. \tag{4}$$

Assim, resulta da aplicação da referida fórmula que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 \binom{n-1}{k},$$

o que conduz ao resultado pretendido.

6.3. Por (4) e pelo resultado na alínea anterior tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k} = R(n,3) &= nR(n-1,2) + 2nR(n-1,1) + nR(n-1,0) \\ &= n\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \binom{n-1}{k} + 2n\sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k},\end{aligned}$$

que, pelo resultado provado na alínea 6.1, por (3) e pelo Binómio de Newton,

$$= n^2(n-1)2^{n-3} + 2n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n^2(n+3)2^{n-3}.$$