Investigação Operacional - 21076

E-FÓLIO A

Ano lectivo 2015/2016

Proposta de Resolução

1.

Variáveis:

Sejam

X_1 percentagem de M_1 / Kg de mistura
X_2 percentagem de M_2 / Kg de mistura
X_3 percentagem de M_3 / Kg de mistura

Tomando como referência a produção de1 Kg de mistura haverá que satisfazer a igualdade

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1 \qquad [1]$$

Função objectivo:

O custo por Kg de mistura é uma função F que se pretende minimizar:

$$F = 15X_1 + 30X_2 + 60X_3$$

Restrições:

$$\begin{array}{ll} 1200X_1 + 2000X_2 + 2500X_3 \geq 1800 & [2] \\ 4X_1 + 8X_2 + 15X_3 \geq 7 & [3] \\ 0{,}5X_1 + 0{,}6X_2 + 0{,}4X_3 \leq 0{,}5 & [4] \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 & \end{array}$$

Definição das retas:

De [1] concluímos que $X_3 = 1 - X_1 - X_2$. De seguida substituindo em [2], [3] e [4] e fazendo as simplificações convenientes chegamos às seguintes condições;

$$13X_1 + 5X_2 \leq 7 \qquad [5]$$
$$11X_1 + 7X_2 \leq 8 \qquad [6]$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 1 \qquad [7]$$

Por outro lado, considerando [1], a função objectivo vêm:

$$F = 60 - 45X_1 - 30X_2$$

a) Método Gráfico

Após os cálculos auxiliares anteriores, estamos agora em condições de aplicar o método gráfico.

Reta a)		Reta b)		Reta c)	
$13X_1 + 5X_2 = 7$		$11X_1 + 7X_2 = 8$		$X_1 + 2X_2 = 1$	
X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
0	7/5	0	8/7	0	1/2
7/13	0	8/11	0	1	0

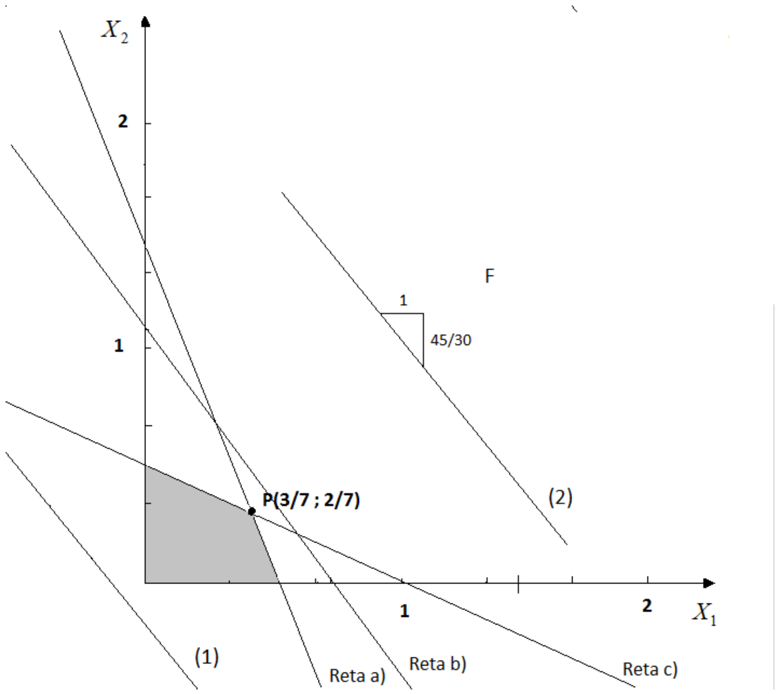
Representando as 3 retas no gráfico e considerando $X_1, X_2 \geq 0$, temos o espaço de soluções admissíveis representado no gráfico a sombreado.

Analisando agora, o que se passa relativamente à função objectivo F, concluímos que esta decresce quando se desloca no sentido de (1) para (2), sendo portanto esse o sentido da minimização.

Sendo assim, é fácil constatar que o último ponto a ser tocado quando deslizamos a reta no sentido pretendido, é o ponto P(3/7 ; 2/7), sendo nesse caso $F_{\min} = 225/7$.

Concluímos as percentagens de cada um dos componentes por Kg de mistura, deve ser:

3/7 (ou seja 42,8%) de M_1
2/7 (ou seja 28,6%) de M_2
2/7 (ou seja 28,6%) de M_3



b) Método Simplex

Função objectivo

$$\min F = 15X_1 + 30X_2 + 60X_3 \quad (\equiv \max(-F))$$

Restrições

$$\begin{aligned} &13X_1 + 5X_2 \leq 7 \\ &11X_1 + 7X_2 \leq 8 \\ &X_1 + 2X_2 \leq 1 \qquad\qquad [1] \\ &X_3 = 1 - X_1 - X_2 \end{aligned}$$

logo

$$\min F = 160 - 45X_1 - 30X_2 \quad [2] \qquad\qquad (\equiv \max(-F))$$

Aplicação do Método Simplex

Em primeiro lugar introduzimos as variáveis de folga X_4, X_5 e X_6. Assim as desigualdades passam a igualdades obtendo-se as equações:

$$\begin{aligned} &13X_1 + 5X_2 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 7 \\ &11X_1 + 7X_2 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 = 8 \qquad [3] \end{aligned}$$

$$X_1 + 2X_2 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 = 1$$

Entende-se por base o conjunto de variáveis que em cada iteração, são não nulas. Podemos então escolher a base de modo que cada variável apareça com coeficiente unitário e uma só vez em cada equação.

Começando por fazer $X_1 = X_2 = 0$ a base será $X_4 = 7$; $X_5 = 8$ e $X_6 = 1$. Uma vez que queremos minimizar a função F, o que necessitamos é aumentar X_1 e X_2 de tal modo que a função tome o menor valor. Por outro lado, dado que o coeficiente de X_1 é negativo e de maior valor absoluto, é esse o valor que convém aumentar.

1º Quadro do Simplex

	X_1	X_2	X_4	X_5	X_6	Δ	Δ / X_1
X_4	13*	5	1	0	0	7	**7/13**
X_5	11	7	0	1	0	8	8/11
X_6	1	2	0	0	1	1	1
- F	**45**	30	0	0	0	-60	

2º Quadro do Simplex

	X_1	X_2	X_4	X_5	X_6	Δ	Δ / X_2
X_1	1	5/13	1/13	0	0	7/13	**7/5**
X_5	0	36/13	-11/13	1	0	27/13	27/36
X_6	0	21/13	-1/13	0	1	6/13	**6/21**
- F	**0**	**165/13**	-45/13	0	0	-1095/13	

3º Quadro do Simplex

	X_1	X_2	X_4	X_5	X_6	Δ	
X_1	1	0	2/21	0	-5/21	9/21	
X_5	0	0	-15/21	1	-36/21	27/21	
X_2	0	1	-1/21	0	13/21	6/21	
- F	**0**	0	-60/21	0	-165/21	-1845/21	
			$<$**0**		$<$**0**	$<$**0**	

Uma vez que chegamos a uma situação em que só há valores nas colunas de X_4 e X_6 quem deixaram de ser básicas (e portanto são ambas nulas), e por outro lado os coeficientes de - F referentes às variáveis nulas, são todos negativos, conclui-se que o problema está determinado. Concluímos assim que,

$X_1 = 3/7$; $X_2 = 2/7$ e consequentemente $X_3 = 1 - X_1 - X_2 = 1 - 9/21 - 2/7 = 2/7$

E o mínimo da função

$$F = 15 \times \frac{3}{7} + 30 \times \frac{2}{7} + 60 \times \frac{2}{7} = \frac{225}{7}$$

Assim e comprovando-se os resultados obtidos pelo método gráfico, conclui-se que a composição por Kg de mistura é $3/7$ de M_1, $2/7$ de M_2, $2/7$ de M_3 e o custo por Kg é 225/7 u.m.

2.
a)

i) $X, Y \geq 0$

Reta a)

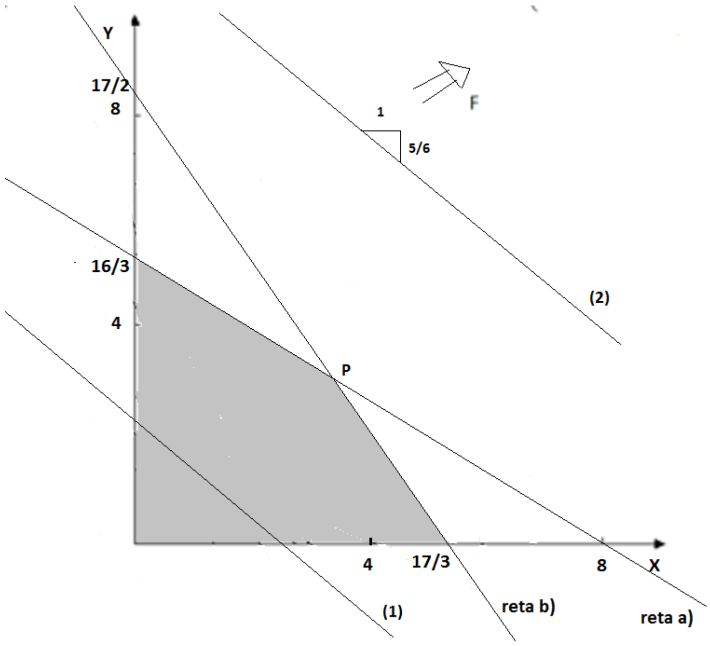
$2X + 3Y = 16$ [1]

X	Y
0	16/3
8	0

Reta b)

$3X + 2Y = 17$ [2]

X	Y
0	17/2
17/3	0



Representando as 2 retas no gráfico e considerando $X, Y \geq 0$, temos o espaço de soluções admissíveis representado no gráfico a sombreado.

Analisando agora, o que se passa relativamente à função objectivo F, concluímos que esta cresce quando se desloca no sentido de (1) para (2), sendo portanto esse o sentido da maximização.

Sendo assim, é fácil constatar que o último ponto a ser tocado quando deslizamos a reta no sentido pretendido, é o ponto P(57/15 ; 14/5), portanto a solução óptima é:

$$X^* = 57/15; \quad Y^* = 14/5 \; ; \; F^* = 537/15.$$

ii) $X, Y \geq 0$ e X inteira

Dado que o problema é de maximização e X inteira, interessará que Y seja o maior possível e como tal bastará averiguar as soluções correspondentes a X inteiro e ao contorno superior do espaço de soluções admissíveis.

X=0 de [1] temos Y=16/3 e F= 32

X=1 de [1] temos Y=14/3 e F= 33

X=2 de [1] temos Y=12/3 e F=102/3

X=3 de [1] temos Y=10/3 e F=35

X=4 de [1] temos Y=5/2 e F=35

R: Existem duas soluções óptimas:

$$X^*=3 \;;\; Y^*=10/3 \;;\; F^*=35$$

$$X^*=4 \;;\; Y^*=5/2 \;;\; F^*=35$$

iii) $X, Y \geq 0$ e Y inteira

Dado que o problema é de maximização e neste caso *Y* inteira, interessará que *X* seja o maior possível e como tal bastará averiguar as soluções correspondentes a *Y* inteiro e ao contorno superior do espaço de soluções admissíveis.

$Y=0$ de [2] temos $X=17/3$ e $F= 85/3$
$Y=1$ de [2] temos $X=15/3$ e $F= 31$
$Y=2$ de [2] temos $X=13/3$ e $F=101/3$
$Y=3$ de [1] temos $X=7/2$ e $F=71/2$
$Y=4$ de [1] temos $X=2$ e $F=34$
$Y=5$ de [1] temos $X=1/2$ e $F=32.5$

R: A solução óptima é neste caso:

$$X^*=7/2 \;;\; Y^*=3 \;;\; F^*=71/2$$

iv) $X, Y \geq 0$ e X,Y inteiros

Dado que o problema é de maximização e neste caso *X* e *Y* devem assumir valores inteiros, interessará que *X* e *Y* seja o maior possível (ambos os coeficientes na função objectivo são positivos) e como tal bastará averiguar as soluções correspondentes a *X* e *Y* inteiros próximos dos limites (retas a) e b)) do espaço de soluções admissíveis.

$X=1 ; Y=4$ temos $F= 25$
$X=2 ; Y=3$ temos $F= 28$
$X=2 ; Y=4$ temos $F= 34$
$X=3 ; Y=3$ temos $F= 33$
$X=3 ; Y=2$ temos $F= 27$
$X=4 ; Y=1$ temos $F= 26$
$X=5 ; Y=1$ temos $F= 31$

R: A solução óptima é neste caso:

$$X^{*}=2 \ ; \ Y^{*}=4 \ ; \quad F^{*}=34$$

b) Mediante as soluções obtidas em cada caso, embora estas sendo próximas, verifica-se que o maior valor para a função objetivo acontece quando não se impõem outras restrições para além das do problema e não negatividade, ou seja no caso i). De todas as soluções a que corresponde ao valor mais baixo da função objetivo é a solução que impõe *X* e *Y* inteiros sendo compreensível uma vez que aumentámos as restrições do problema.

3. Uma vez que os 4 funcionários prestam serviço por turnos, sendo de esperar que a portagem funcione durante todas as 24 horas de um dia completo, cada um trabalha 6 horas e portanto estamos perante um sistema M/M/1, com população infinita e fila máxima infinita.

Do enunciado retiramos que $\mu = \frac{1}{20}$ seg^{-1} = 3 min^{-1} ; λ = 120 h^{-1} = 2 min^{-1} . Assim, podemos calcular a taxa de ocupação $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$ $(\rho < 1)$ e portanto o sistema poderá atingir uma situação de equilíbrio.

a) A taxa de ocupação é $\rho = \frac{2}{3}$, ou seja aproximadamente 66,6% . De acordo com os dados do enunciado sendo a taxa de utilização (ocupação) inferior a 75% isso poderia levar à implementação de um sistema automático e consequente possível despedimento dos funcionários. Mas por outro lado, se a taxa de inutilização for inferior a 50% (ou seja taxa de utilização superior a 50%) o ministério pagará a diferença. Neste caso e uma vez que 66,6% > 50%, estamos em condições de afirmar que não há razões para preocupação por parte dos funcionários.

b) Número médio de automóveis na fila

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}} = 1{,}33 \text{ automóveis}$$

Número médio de automóveis na portagem

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{9} + \frac{2}{3} = 2 \text{ automóveis}$$

c) $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = 0{,}665 \text{ min}$

d) $P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cong (33{,}3\%)$

e) $P(W > 1) = e^{-\mu(1-\rho)1} = e^{-3\left(1-\frac{2}{3}\right)1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \cong (37\%)$

f) Neste caso temos $W_q = 0{,}5 \text{ min}$, pelo que

$$0{,}5 = \frac{L_q}{\lambda} \Leftrightarrow 0{,}5 = \frac{L_q}{2} \Leftrightarrow L_q = 1$$

Sabendo-se que $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$, podemos obter o valor correspondente à nova taxa de ocupação.

$$\frac{\rho^2}{1-\rho} = 1 \Leftrightarrow \rho^2 = -\rho + 1 \Leftrightarrow \rho^2 + \rho - 1 = 0$$

Aplicando a formula resolvente obtemos a única solução admissível

$$\rho \cong 0{,}618$$

Podemos então afirmar que a taxa de ocupação teria de baixar para cerca de 62% e com base nela calcula-se o novo tempo médio de atendimento.

$$0{,}618 = \frac{\lambda}{\mu} \Leftrightarrow 0{,}618 = \frac{2}{\mu} \Leftrightarrow \mu = 3{,}24 \text{ min}^{-1}$$

Será portanto possível diminuir o tempo médio de espera na fila para 30 segundos se a duração do atendimento passar de 20 para cerca de 18,5 segundos.