Matemática Preparatória | 21160 - Resolução

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

1. (**2.0 valores**) Para avaliar um serviço, através de um *item* de Likert com 5 níveis, foi realizado um inquérito a 120 pessoas, tendo-se obtido os seguintes resultados:

Nível de Likert	n_i	f_i
1		0.05
2		0.2
3		0.2
4		0.25
5		

onde n_i representa a frequência absoluta simples e f_i representa a frequência relativa simples.

Complete a tabela e indique, justificando, qual é a média do nível de Likert.

Resolução:

Nível de Likert	n_i	f_i
1	6	0.05
2	24	0.2
3	24	0.2
4	30	0.25
5	36	0.3

Pela tabela anterior facilmente se percebe que a média, que denotaremos por $\bar{x}$, é $\bar{x} = \frac{6\times1+24\times2+24\times3+30\times4+36\times5}{120} = 3.55$.

2. (**2.0 valores**) Determine o domínio da função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{2+\ln(x^2+x-6)}{\sqrt{x+1}}$$

onde $\ln$ é o logaritmo na base e.

Resolução: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2+x-6 > 0 \wedge x+1 > 0\}$.

Temos

$x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

$x^2+x-6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4\times1\times(-6)}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$.

Assim, tendo atenção ao sentido da concavidade da parábola temos que $x^2+x-6 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-3[\cup]2,+\infty[$.

Logo $D_f = (]-\infty,-3[\cup]2,+\infty[)\cap]-1,+\infty[=]2,+\infty[$.

3. (**4.0 valores**) Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+5}-n)$

Resolução: Indeterminação do tipo $-\infty+\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+5}-n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n+5}-n)(\sqrt{n+5}+n)}{\sqrt{n+5}+n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n+5})^2-n^2}{\sqrt{n+5}+n} =$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+5-n^2}{\sqrt{n+5}+n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2(\frac{n}{n^2}+\frac{5}{n^2}-1)}{n(\frac{\sqrt{n+5}}{n}+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}-1)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}+1} =$
$-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x}$

Resolução: Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} - \lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x} = 1-1 = 0$.

4. (**4.0 valores**) Considere a função real de variável real definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1}, & x \le 0 \\ 1-x+\sqrt{x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

a) Mostre que a função g é contínua em $x = 0$.

Resolução: Para se verificar que função g é contínua em $x = 0$ tem de se verificar a condição: $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$.

Ora

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{-1}{-1} = 1$ e

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}(1 - x + \sqrt{x}) = 1$ e

$g(0) = 1$.

Provamos assim que g é contínua em $x = 0$.

b) Mostre que a função g não é diferenciável em $x = 0$.

Resolução:

Temos que $g'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2x-1}{x-1}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x-1-x+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x-1} = -1$.

E

$g'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x+\sqrt{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}^2-x^2}{x(\sqrt{x}+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-x^2}{x(\sqrt{x}+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-x)}{x(\sqrt{x}+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x}{\sqrt{x}+x} = +\infty$.

Como $g'(0^-) \neq g'(0^+)$ não existe $g'(0)$, isto é g não é diferenciável em $x = 0$.

FIM