e-Fólio B

Correcção Sumária

Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**
c)	**b)**	**d)**

4. Uma fracção $\frac{a}{b}$ diz-se irredutível se a e b são números primos entre si. Ou seja e de um modo equivalente, se o único divisor comum a a e b é a unidade.

Suponhamos então que existe um $m \in \mathbb{N}$ não nulo tal que

$$m \,|\, (21n+4), \;\; m \,|\, (14n+3)$$

Nestas condições e por linearidade tem-se que

$$m \,|\, \underbrace{(3(14n+3) - 2(21n+4))}_{=1},$$

pelo que $m = 1$.

5.

5.1. Atendendo ao Exercício 4.3 sobre Divisibilidade e ao facto de $\mathrm{mdc}(a,b)$ ser um divisor de a e de b tem-se

$$\mathrm{mdc}\left(\frac{a}{\mathrm{mdc}(a,b)}, \frac{b}{\mathrm{mdc}(a,b)}\right) = \frac{1}{\mathrm{mdc}(a,b)}\mathrm{mdc}(a,b) = 1.$$

5.2. Uma vez que $\mathrm{mdc}(a,b) \,|\, a$, $\mathrm{mdc}(a,b) \,|\, b$, a e b podem-se escrever na forma $a = 15m$, $b = 15n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Deste modo

$$90 = a + b = 15(m+n) \implies m + n = 6.$$

Por outro lado, de acordo com a alínea anterior, $\mathrm{mdc}(m,n) = 1$. Deste modo, esta condição exclui de imediato os casos $m = n = 3$, $m = 2$ e $n = 4$, ou $m = 4$ e $n = 2$, sendo os únicos pares (m,n) de números inteiros positivos possíveis

$$(m,n) = (1,5) \implies a = 15, b = 75,$$
$$(m,n) = (5,1) \implies a = 75, b = 15.$$

6. Note-se que $32 = 2^5$ e $4 = 2^2$. Assim, $2^{32} + 1 = 2^{2^5} + 1$ e $2^4 + 1 = 2^{2^2} + 1$, resultando do Exemplo 1.6 do Texto sobre Divisibilidade e do facto de 2 ser um número par, que $2^{32} + 1$ e $2^4 + 1$ são primos entre si.

7.

7.1. Sendo p e q dois números primos diferentes, p e q são primos entre si. Logo, pela Proposição 1.13 do Texto sobre Divisibilidade,

$$\mathrm{mmc}(p, q) = pq.$$

Por seu turno, pelo Lema 1.11 alínea 2 do mesmo Texto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{mdc}(p + nq, q) = \mathrm{mdc}(p - (-n)q, q) = \mathrm{mdc}(p, q) = 1,$$

pelo que novamente pela Proposição 1.13,

$$\mathrm{mmc}(p + nq, q) = (p + nq)q.$$

Estes factos conjugados permitem assim concluir que

$$\mathrm{mmc}(p + nq, q) - \mathrm{mmc}(p, q) = (p + nq)q - pq = nq^2.$$

7.2. Comece-se por observar que por a ser um múltiplo de p,

$$\mathrm{mdc}(a, p) = p, \ \mathrm{mmc}(p, a) = a.$$

Deste modo, resulta do Lema 1.11, alínea 2,

$$\mathrm{mdc}(p + na, a) = \mathrm{mdc}(p, a) = p,$$

o que implica, pela Proposição 1.13,

$$\mathrm{mmc}(p + na, a) = \frac{(p + na)a}{p} = \frac{p + na}{p}\mathrm{mmc}(p, a).$$

Como, por linearidade,

$$p \,|\, p, \ p \,|\, a \implies p \,|\, \underbrace{(p + na)}_{\in \mathbb{N}},$$

tem-se que $\frac{p+na}{p} \in \mathbb{N}$, com o que fica provado o pretendido.

8. Comece-se por observar que $71392 = 4 \times 17848$. Assim, de acordo com a demonstração do critério de divisibilidade por 13 (Exercício 7.1 da Actividade Formativa 2), tem-se que

$$71392 = 4 \times 17848 \equiv \underbrace{1784 - 9 \times 8}_{=1712} \pmod{13}.$$

Do mesmo modo,

$$1712 = 4 \times 428 \equiv \underbrace{42 - 9 \times 8}_{=-30} \pmod{13}.$$

Ou seja e por transitividade,

$$71392 \equiv -30 \pmod{13},$$

pelo que o resto da divisão de 71392 por 13 é igual ao resto da divisão de -30 por 13, ou seja, 9 (pela divisão euclidiana, $-30 = 13 \times (-3) + 9$).