UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21021

Computação Numérica

8 de fevereiro de 2017

INSTRUÇÕES

- Leia estas instruções na totalidade antes de iniciar a resolução da prova.
- O enunciado da prova é constituído por 5 grupos de questões e termina com a palavra FIM.
- Se o seu exemplar não estiver completo ou nele se verificar qualquer outra deficiência, por favor dirija-se ao professor vigilante.
- A prova deve ser resolvida na sua totalidade em folhas de respostas.
- Nas respostas, tenha a preocupação de utilizar uma letra legível.
- Todas as respostas devem ser escritas unicamente com caneta azul ou preta.
- A prova é SEM CONSULTA. Todos os elementos necessários à resolução são fornecidos no enunciado.
- Para a execução da prova é INDISPENSÁVEL a utilização de calculadora.
- As cotações são indicadas por grupo e nas próprias questões.
- As respostas devem ser claras, indicando todos os passos e cálculos intermédios necessários à compreensão da resolução de cada questão. À simples indicação do resultado é atribuída a cotação zero.
- Nas questões de escrita de programas, a sua correção terá em conta critérios de proficiência e compreensibilidade do código (legibilidade, indentação, estrutura, comentários e explicação geral).
- O não cumprimento das instruções implica a anulação das respetivas questões.
- O tempo de realização da prova é de 150 minutos.

Grupo I [3 valores]

1.1. [1] Calcule o polinómio de Taylor com 2 termos não nulos da função $f(x) = x \sin x$ para $x \in [-\pi/4, \pi/4]$. Utilize $x_0 = 0$.

1.2. [1] Calcule o erro da aproximação polinomial obtida na alínea 1.1.

1.3. [1] Recorrendo à aproximação polinomial obtida na alínea 1.1 calcule uma aproximação $\bar{f}$ de $f(\pi/6)$. Calcule o respetivo erro e verifique se está de acordo com o erro estimado na alínea 1.2.

Grupo II [3 valores]

2. Considere a equação seguinte com uma única raiz no intervalo $[0, 1]$,

$$e^{-x} - 2x = 0$$

2.1. [2] Obtenha uma aproximação do valor dessa raiz aplicando três iterações do método de Newton a partir do valor inicial $x_0 = 1$. Construa uma tabela onde constem os valores necessários de $k, x_k, f(x_k), f'(x_k)$ para $k = 0, 1, 2, 3$.

2.2. [1] Determine uma estimativa do erro para a aproximação da raiz determinada na alínea anterior.

Grupo III [4 valores]

3. Considere a matriz A e o vetor b seguintes,

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 6 & 5 & 9 \\ 12 & 9 & 26 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 33 \\ 22 \\ 72 \end{bmatrix}$$

3.1. [2] Determine a fatorização de Choleski LL^T de A.

3.2. [2] Resolva o sistema de equações lineares $Ax = b$ com $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ utilizando a fatorização encontrada na alínea anterior.

Grupo IV [2 valores]

4. Considere a tabela de valores seguinte correspondente a uma função f(x),

x	$f(x)$
0.0	1.0
0.2	1.491825
0.4	2.225541

4.1. [2] Obtenha o polinómio interpolador de $f(x)$ nos três pontos tabelados através da fórmula de Newton com diferenças divididas.

Grupo V [8 valores]

5.1. [1.5] Considere a matriz A e o vetor b definidos no grupo III e o comando Octave `M=[[8, 1:3:7; A(1:2,:) b(2:3)] A([1 3],:)']`. Indique a matriz M resultante.

5.2. [1.5] Considere as funções $f(x) = 2 - x$ e $g(x) = x^3$. Apresente um pequeno programa em Octave que crie um gráfico conjunto das funções $f()$ e $g()$ para x de -1 a 1 com intervalos de uma centésima e com as seguintes características:

- $f()$ a traço contínuo de cor vermelho, com legenda;
- $g()$ a traço contínuo de cor azul, com legenda;
- com grelha;
- o ponto (0, 1) deve ser assinalado com um marcador tipo cruz, de cor preta;
- o eixo das abcissas deve ter a etiqueta "x";
- o eixo das ordenadas deve ter a etiqueta "$f(x), g(x)$".

5.3. [5] Escreva a função em Octave,

```
function y=newton_polydiv(xi,fi,x)
%
% Metodo de interpolação polinomial de Newton
%    com diferenças divididas
% Calcula o valor interpolado y=pn(x) da função f()
% xi: vector com os nós de interpolação
% fi: vector com o valor de f() nos nós de interpolação
%  x: valor para calcular pn(x)
```

que dado vetores com os valores de $x_i, f(x_i), i = 0, 1, \ldots, n$ e um valor de x, calcula o valor interpolado $y = p_n(x)$.

FORMULÁRIO

Fatorização $A = LU$

$$u_{1,j} = a_{1,j} \quad j \geq 1$$

$$l_{i,1} = a_{i,1}/u_{1,1} \quad i \geq 2$$

$$u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}u_{k,j} \quad j \geq i \geq 2$$

$$l_{j,i} = (a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{j,k}u_{k,i})/u_{i,i} \quad j > i \geq 2$$

Fatorização (Cholesky) $A = LL^T$

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$$

$$l_{i,1} = a_{i,1}/l_{1,1} \quad i \geq 2$$

$$l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2} \quad i \geq 2$$

$$l_{j,i} = (a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}l_{j,k})/l_{i,i} \quad j > i \geq 2$$

Fórmula Interpoladora de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L(x_i)$$

$$L(x_i) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_i - x_j}\right)$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças divididas

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_i]$$

$$\cdot (x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças descendentes

$$p_n(x_0 + sh) = f_0 + s\Delta_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta_0^2 + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta_0^n$$

FIM