Matemática Preparatória | 21160 - Resolução

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

1. (**2.0 valores**) A propósito da Jornada Mundial da Juventude, que este ano decorre em Lisboa, realizou-se um inquérito a 50 jovens católicos espanhóis residentes em Madrid, em que se perguntava quantas vezes tinham visitado a capital portuguesa. Obtiveram-se os seguintes resultados:

número de visitas a Lisboa	f_i	F_i
0		
1	0.4	0.7
2	0.2	
3		

onde f_i representa a frequência relativa simples e F_i representa a frequência relativa acumulada.

Complete o quadro das frequências e indique, justificando, qual é a moda e a média do número de visitas a Lisboa.

Resolução:

número de visitas a Lisboa	f_i	F_i
0	0.3	0.3
1	0.4	0.7
2	0.2	0.9
3	0.1	1

Na tabela anterior acrescentemos uma coluna para n_i, a frequência absoluta simples.

número de visitas a Lisboa	n_i	f_i	F_i
0	$0.3 \times 50 = 15$	0.3	0.3
1	$0.4 \times 50 = 20$	0.4	0.7
2	$0.2 \times 50 = 10$	0.2	0.9
3	$0.1 \times 50 = 5$	0.1	1

Pela tabela anterior facilmente se percebe que a moda, sendo o valor mais frequente, é 1 e a média, que denotaremos por $\bar{x}$, é $\bar{x} = \frac{15\times 0+20\times 1+10\times 2+5\times 3}{50} = 1.1$.

2. (**2.0 valores**) Determine o domínio da função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{\ln(x^3 - 2x)}{2x^5}$$

onde $\ln$ é o logaritmo na base e.

Resolução: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x > 0 \wedge 2x^5 \neq 0\}$.

Temos

$x^3 - 2x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) > 0$.

$2x^5 \neq 0 \Leftrightarrow x^5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Consideremos a seguinte tabela:

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
$x - \sqrt{2}$	-	-	-	-	-	0	+
$x + \sqrt{2}$	-	0	+	+	+	+	+
$x^3 - 2x$	-	0	+	0	-	0	+

Logo $D_f =]-\sqrt{2}, 0[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$.

3. (**4.0 valores**) Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{n\to+\infty}(-\sqrt{n^2+3}+n)$

Resolução: Indeterminação do tipo $-\infty+\infty$.
$\lim_{n\to+\infty}(-\sqrt{n^2+3}+n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{(-\sqrt{n^2+3}+n)(-\sqrt{n^2+3}-n)}{-\sqrt{n^2+3}-n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3-n^2}{-\sqrt{n^2+3}-n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{-\sqrt{n^2+3}-n} = 0.$

b) $\lim_{x\to-1}\dfrac{1-e^{x+1}}{2x^2+x-1}$

Resolução: Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.
$\lim_{x\to-1}\frac{1-e^{x+1}}{2x^2+x-1} = \lim_{x\to-1}\frac{1-e^{x+1}}{(x+1)(2x-1)} = \lim_{y\to0}\frac{1-e^{y}}{y(2(y-1)-1)} = \lim_{y\to0}\frac{1-e^{y}}{y(2y-3)} = \lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}\times\lim_{y\to0}\frac{-1}{2y-3} = 1\times\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$
Fizemos a mudança de variável $y = x+1$.

4. (**4.0 valores**) Considere a função real de variável real definida por

$$g(x) = \begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}, & x\leq 0 \\ \frac{x^2+1}{x}, & x>0 \end{cases}$$

a) Verifique se g é contínua em $x=0$.
Resolução: Para que a função g seja contínua em $x=0$ tem de se verificar a condição: $\lim_{x\to0^-}g(x) = \lim_{x\to0^+}g(x) = g(0)$.
Ora
$\lim_{x\to0^-}g(x) = \lim_{x\to0^-}x+\sqrt{x^2+1} = \sqrt{1} = 1$ e
$\lim_{x\to0^+}g(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{x^2+1}{x} = +\infty$.
Como os limites laterais são diferentes a função g não é contínua em $x=0$.

b) Calcule a derivada de g em $x=-1$.
Resolução:
Para $x<0$ temos que $g'(x) = (x+\sqrt{x^2+1})' = x' + (\sqrt{x^2+1})' = 1+((x^2+1)^{\frac{1}{2}})' = 1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)' = 1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}.2x = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
Logo $g'(-1) = 1+\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+1}} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

FIM