e-Fólio B

Física Geral
21048

Instruções para elaboração deste e-Fólio
Documento de texto, .DOC, .PDF ou .PS; fonte 11 ou 12; espaçamento livre; máximo 6 páginas.
Pode incluir desenhos, várias cores e pode inclusive juntar elementos aos desenhos do próprio e-Fólio.
Para incluir fórmulas pode usar o editor de fórmulas do seu processador de texto ou gerá-las à parte.
Entregar até às **23:55 h do dia 27 de janeiro**, por via da plataforma.

Critérios de correção: (para cada questão as percentagens oscilarão nos intervalos indicados)
20 ± 10% Rigor científico na identificação dos princípios físicos em jogo.
40 ± 10% Rigor científico da colocação do problema em equação.
40 ± 10% Rigor dos cálculos, expressão e (se aplicável) interpretação corretas dos resultados.

Este e-Fólio tem a cotação máxima de 4 valores.

Nos problemas abaixo dê as suas respostas em unidades SI.

1. Duas cargas, $q_1 = 2{,}50\ \mu\text{C}$ e $q_2 = -1{,}20\ \mu\text{C}$, estão fixas segundo o eixo dos xx nas posições respetivamente $x_1 = -1{,}50\ \text{m}$ e $x_2 = 0{,}500\ \text{m}$.

Calcule:

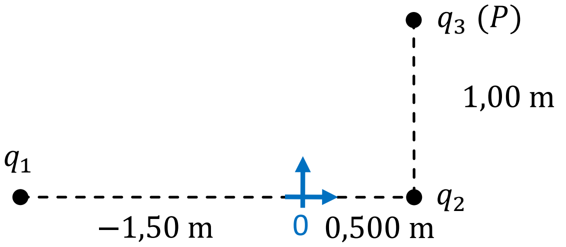
a. **(0,8 val)** O trabalho das forças elétricas originadas em q_1 e q_2 sobre uma terceira carga, $q_3 = 0{,}680\ \mu\text{C}$, que é trazida de desde o infinito até ao ponto P, de coordenadas $(x, y) = (0{,}500\ \text{m} ; 1{,}00\ \text{m})$.

b. **(0,8 val)** A força eletrostática que as cargas q_1 e q_2 exercem sobre q_3 quando esta está no ponto P.

O trabalho realizado sobre q_3 pode ser calculado de $W_C = -\Delta E_p$. Da expressão $V = \Sigma k_e \frac{q}{r}$, vemos que as cargas q_1 e q_2 causam em P um potencial elétrico

$$V(P) = \sum_{i=1}^{2} k_e \frac{q_i}{r_{iP}} \rightarrow V(P) = k_e \frac{q_1}{r_{1P}} + k_e \frac{q_2}{r_{2P}}$$

Aqui r_{iP} significa "distância entre o ponto i e P". Sendo o problema a 2D, esta distância é dada pelo teorema de Pitágoras. Um desenho ajudará a perceber:



(A azul claro, a origem do referencial xy.) Agora é fácil de ver que

$$d_{1P} = \sqrt{(1{,}50\ \text{m} + 0{,}500\ \text{m})^2 + (1{,}00\ \text{m})^2} = 2{,}236\ \text{m} \quad ; \quad d_{2P} = 1{,}00\ \text{m}$$

Substituindo valores na expressão para $V(P)$ temos

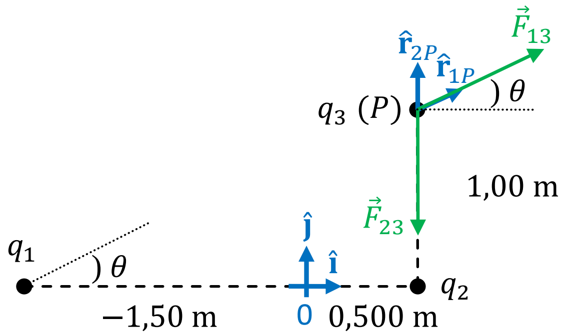
$$V(P) = \left(8{,}99 \times 10^9 \frac{\mathrm{N.m^2}}{\mathrm{C^2}}\right)\left(\frac{2{,}50 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}{2{,}236\ \mathrm{m}} + \frac{-1{,}20 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}{1{,}00\ \mathrm{m}}\right) = -736{,}6\ \mathrm{V}$$

Aplicando finalmente $W_C = -\Delta E_p$ para forças elétricas temos, notando também que $E_{pe} = qV_e$ e que $V(\infty) = 0$ (por convenção),

$$\begin{aligned} W_C = -\Delta E_p \ \rightarrow\ W_e = -\Delta E_{pe} \Leftrightarrow W_e &= -\left(E_{pe,f} - E_{pe,i}\right) = -\left[E_{pe}(P) - E_{pe}(\infty)\right] \\ &= -[q_3 V(P) - q_3 V(\infty)] \Leftrightarrow W_e = -[(0{,}680 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(-736{,}6\ \mathrm{V}) - 0] \\ &= 500{,}8 \times 10^{-6}\ \mathrm{J} \quad (501\ \mathrm{\mu J}) \end{aligned}$$

O valor positivo significa que as cargas 1 e 2 atraem espontaneamente a carga 3.

Quanto à força eletrostática sobre q_3, voltemos ao desenho acima e coloquemos nele versores $\hat{\mathbf{r}}_{iP}$ e as forças elétricas:



Aqui $\vec{F}_{13}$ e $\vec{F}_{23}$ significam respetivamente 'força que 1 exerce sobre 3' e 'força que 2 exerce sobre 3' e $\hat{\mathbf{r}}_{1P}$ ($\hat{\mathbf{r}}_{2P}$) raios-vetores unitários (i.e. versores) na direção e sentido de 1 para P (2 para P). Note-se o caráter vetorial de todas estas grandezas! A resolução deste problema só estará correta atendendo a este caráter. Note-se também que forças (e campos) elétricas têm no denominador distâncias *ao quadrado*, ao passo que nos potenciais (e energia) elétricos essas distâncias *não estão* ao quadrado.

Seja $\vec{F}(q_3)$ a força que as cargas 1 e 2 exercem sobre a carga 3. Escrevendo a lei de Coulomb na sua forma vetorial, $\vec{F} = k_e \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}$, temos

$$\vec{F}(q_3) = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = k_e \frac{q_1 q_3}{r_{1P}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1P} + k_e \frac{q_2 q_3}{r_{2P}^2} \hat{\mathbf{r}}_{2P}$$

Todos os valores acima são conhecidos, mas a soma dos versores $\hat{\mathbf{r}}_{iP}$ é vetorial. Podemos fazer esta soma separando-a segundo componentes em x e y: $\hat{\mathbf{r}}_{1P} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}}$; $\hat{\mathbf{r}}_{2P} = \hat{\mathbf{j}}$. Das definições de seno e co-seno temos

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\mathrm{cat.\,op}}{\mathrm{hip}} = \frac{1{,}00\ \mathrm{m}}{\sqrt{(2{,}00\ \mathrm{m})^2 + (1{,}00\ \mathrm{m})^2}} = 0{,}4472$$

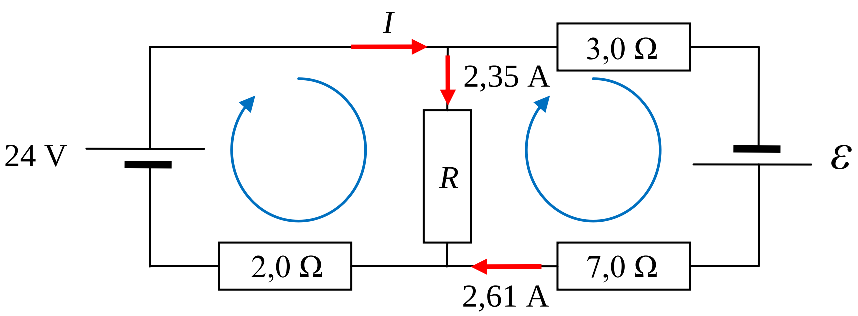
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{cat.\,adj}}{\mathrm{hip}} = \frac{2{,}00\ \mathrm{m}}{\sqrt{(2{,}00\ \mathrm{m})^2 + (1{,}00\ \mathrm{m})^2}} = 0{,}8944$$

Substituindo todos os valores temos finalmente, a 3 AS,

$$\vec{F}(q_3) = \left(8{,}99 \times 10^9 \frac{\mathrm{N.m^2}}{\mathrm{C^2}}\right)\left[\frac{(2{,}50 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(0{,}680 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{(2{,}236\ \mathrm{m})^2}(0{,}8944\,\hat{\imath} + 0{,}4472\,\hat{\jmath})\right.$$
$$\left. + \frac{(-1{,}20 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(0{,}680 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})}{(1{,}00\ \mathrm{m})^2}\hat{\jmath}\right]$$
$$= \left(8{,}99 \times 10^9 \frac{\mathrm{N.m^2}}{\mathrm{C^2}}\right)\left[\left(0{,}3400 \times 10^{-12}\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{m^2}}\right)(0{,}8944\,\hat{\imath} + 0{,}4472\,\hat{\jmath})\right.$$
$$\left. + \left(-0{,}816 \times 10^{-12}\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{m^2}}\right)\hat{\jmath}\right] \Leftrightarrow \vec{F}(q_3)$$
$$= \left(8{,}99 \times 10^9 \frac{\mathrm{N.m^2}}{\mathrm{C^2}}\right)\left[\left(0{,}3041 \times 10^{-12}\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{m^2}}\right)\hat{\imath} + \left(-0{,}6640 \times 10^{-12}\frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{m^2}}\right)\hat{\jmath}\right]$$
$$\Leftrightarrow \vec{F}(q_3) = (2{,}734 \times 10^{-3}\ \mathrm{N})\hat{\imath} + (-5{,}969 \times 10^{-3}\ \mathrm{N})\hat{\jmath} \Leftrightarrow \vec{F}(q_3)$$
$$= (2{,}73\ \mathrm{mN})\hat{\imath} + (-5{,}97\ \mathrm{mN})\hat{\jmath}$$

O estudante deve reproduzir o cálculo acima para ganhar prática no manuseio de expressões com grandezas vetoriais. Outra possibilidade é calcular as duas forças em separado e somá-las no fim.

2. Observe o circuito abaixo, que se encontra em estado estacionário. As setas a vermelho representam intensidades de corrente.



Calcule os valores

a. **(0,3 val)** Da intensidade de corrente I.

b. **(0,6 val)** Da resistência R.

c. **(0,5 val)** Da força eletromotriz (f.e.m.) ε.

Em primeiro lugar devemos notar que o circuito tem fontes de alimentação em duas malhas diferentes. Quando assim é, é normalmente necessário recorrer às leis de Kirchhoff para resolver o circuito. Se as fontes estivessem todas na mesma malha, à partida bastaria usar regras de associação (de resistências, condensadores, fontes, etc.).

Para calcular a intensidade I basta aplicar a lei dos nós de Kirchhoff ($\Sigma I_i = 0$). O circuito tem dois nós, e basta aplicar a dita lei num deles, p.ex. no nó superior. Nesse nó temos a corrente I a entrar, uma corrente de 2,35 A a sair e uma terceira corrente, não marcada. Para a marcar, devemos atender ao seguinte: da fonte de alimentação da malha direita sai pelo pólo positivo uma corrente de 2,61 A. Se saem 2,61 A da fonte, têm de entrar nela os mesmos 2,61 A, pelo pólo negativo. Assim, a corrente não marcada é então de 2,61 A, a sair do nó superior. A lei dos nós dá-nos então

$$I - 2{,}35\ \mathrm{A} - 2{,}61\ \mathrm{A} = 0 \Leftrightarrow I = 2{,}35\ \mathrm{A} + 2{,}61\ \mathrm{A} = 4{,}96\ \mathrm{A}$$

Note-se a convenção de sinais: ‘+’ para correntes a entrar no nó, ‘–’ para correntes a sair.

Passemos agora à resistência R. Para a calcular basta aplicar a lei das malhas à malha esquerda ($\Sigma R_i I_i + \Sigma V_i = 0$). Escolhendo a circulação como indicado na figura vem

$$-(2{,}35\ \text{A})R - (2{,}0\ \Omega)(4{,}96\ \text{A}) + 24\ \text{V} = 0$$

Note-se a convenção dos sinais para a lei das malhas: (esta convenção de sinais não é a mais intuitiva, mas é a usada pelo livro de texto...)

Correntes: '+' se a corrente e a circulação têm sentidos opostos, '–' se têm sentidos iguais.

F.e.m: '+' se a circulação entra pelo pólo negativo, '–' se pelo pólo positivo.

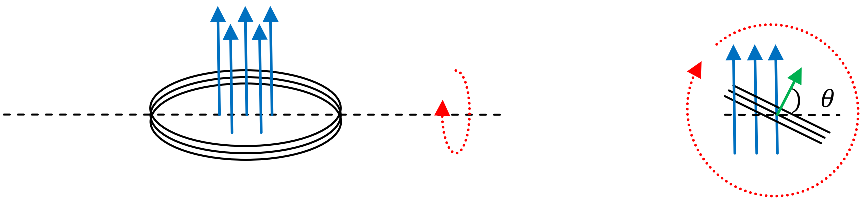
Isolando R temos, a 2 AS,

$$R = \frac{-24\ \text{V} + 9{,}92\ \Omega.\text{A}}{-2{,}35\ \text{A}} = 5{,}99\ \Omega \quad (6{,}0\ \Omega)$$

Finalmente, a f.e.m. pode ser obtida aplicando a lei das malhas à malha direita. Fazendo novamente a circulação como indicado na figura temos:

$$-(3{,}0\ \Omega)(2{,}61\ \text{A}) + \varepsilon - (7{,}0\ \Omega)(2{,}61\ \text{A}) + (5{,}99\ \Omega)(2{,}35\ \text{A}) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon$$
$$= (-14{,}08 + 18{,}27 + 7{,}83)\text{V} \Leftrightarrow \varepsilon = 12{,}02\ \text{V} \quad (12\ \text{V})$$

3. (1,0 val) Um anel com 160 espiras de 2,50 cm de raio é colocado sob um campo magnético uniforme de 1,35 T. O anel é posto a rodar com frequência f = 45,0 Hz, em torno de um eixo paralelo ao campo magnético (c.f. figura – rotação a vermelho, campo magnético a azul). Encontre uma expressão para a f.e.m. induzida no anel, como função do tempo.



A f.e.m. pode ser calculada da lei de Faraday para N espiras, $\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$, com N o n.º de espiras e Φ_B o fluxo magnético através destas. Basta-nos então calcular o fluxo e depois derivar em ordem ao tempo.

A expressão geral do fluxo de um campo vetorial $\vec{V}$ através de uma superfície S é $\Phi = \int_S \vec{V}\cdot d\vec{A}$, com $d\vec{A} = dA\,\hat{\mathbf{n}}$ um elemento de área infinitesimal (dA) vezes o versor unitário perpendicular a essa superfície ($\hat{\mathbf{n}}$) (a verde na figura da direita). Num caso geral este integral é complicado de calcular, mas quando o produto interno $\vec{V}\cdot d\vec{A}$ é constante, a expressão $\Phi = \int_S \vec{V}\cdot d\vec{A}$ simplifica-se:

$$\Phi = \int_S \vec{V}\cdot d\vec{A} \;\rightarrow\; \Phi_B = \int_{\text{sup.espira}} \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_{\text{sup.espira}} B\,dA\cos\theta = B\cos\theta \int_{\text{sup.espira}} dA = BA\cos\theta$$

com A a área delimitada por uma espira. Aqui B e A são constantes; é o co-seno do ângulo que varia no tempo em movimento circular uniforme (i.e. $\theta = \theta_0 + \omega t$), com a frequência de rotação indicada no enunciado. Temos pois, assumindo $\theta_0 = 0$,

$$\cos\theta = \cos(\omega t) = \cos(2\pi f t) = \cos(283t) \quad \text{(SI)}$$

Substituindo na lei de Faraday e recordando a regra de derivação $\frac{d}{dx}\cos f(x) = -f'(x)\,\text{sen}\big(f(x)\big)$ vem, no SI,

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \rightarrow \varepsilon = -N\frac{d}{dt}[BA\cos(283t)] \Leftrightarrow \varepsilon = -160\frac{d}{dt}[(1{,}35)(\pi(0{,}025)^2)\cos(283t)]$$
$$= -160(1{,}35)\pi(6{,}25\times 10^{-4})\frac{d}{dt}[\cos(283t)] = -0{,}4241[283(-\operatorname{sen}(283t))] \Leftrightarrow \varepsilon$$
$$= 120\operatorname{sen}(283t)$$

Reintroduzindo unidades temos

$$\varepsilon = (120\text{ V})\operatorname{sen}[(283\text{ Hz})t]$$

Note-se que 120 V é a tensão *máxima* induzida. A tensão eficaz é $120\text{ V}/\sqrt{2}$, i.e. cerca de 85 V.