UNIVERSIDADE ABERTA
www.univ-ab.pt

# e-Fólio A

cartão de aprendizagem

# Correcção Sumária

Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

| **1.** | **2.** | **3.** |
|---|---|---|
| **b)** | **a)** | **d)** |

**4.1.** Suponhamos que a propriedade $P(n)$ verifica-se para um certo número natural $n$, arbitrário, ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{8}(2n+1)^2. \tag{1}$$

Logo, para $n+1$ tem-se

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = n+1+\sum_{k=1}^{n} k$$

que, pela hipótese (1), é igual a

$$n+1+\sum_{k=1}^{n} k = n+1+\frac{1}{8}(2n+1)^2 = \frac{1}{8}(4n^2+12n+9) = \frac{1}{8}(2(n+1)+1)^2.$$

Ou seja, a propriedade $P(n+1)$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{8}(2(n+1)+1)^2,$$

também se verifica, o que prova o pretendido.

**4.2.** A afirmação é falsa. Com efeito, para $n=1$ tem-se

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1,$$

mas

$$\frac{1}{8}(2\times 1+1)^2 = \frac{9}{8} \neq 1.$$

| |
|---|
| Este exercício mostra como no método de indução matemática é essencial o caso base. |

**5.1.** Por definição

$$(n+2)^{\underline{3}} = \frac{(n+2)!}{((n+2)-3)!}, n \geq 1, \quad n^{\underline{3}} = \frac{n!}{(n-3)!}, n \geq 3.$$

Assim, para $n \geq 3$,

$$(n+2)^{\underline{3}} - n^{\underline{3}} = (n+2)(n+1)n - n(n-1)(n-2) = 6n^2.$$

**5.2.** Para resolver esta alínea comece-se por observar que, para $n \geq 3$,

$$\frac{1}{6}\left((n+2)^{\underline{3}} - n^{\underline{3}}\right) = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} - \frac{n!}{3!(n-3)!} = \binom{n+2}{3} - \binom{n}{3}.$$

Assim, para $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= 1 + 4 + \sum_{k=3}^{n} k^2 \\
&= 5 + \frac{1}{6}\sum_{k=3}^{n} \left((n+2)^{\underline{3}} - n^{\underline{3}}\right) \\
&= 5 + \sum_{k=3}^{n} \left\{ \binom{k+2}{3} - \binom{k}{3} \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{k+2}{3} - \sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Para a primeira soma em (2), a realização da mudança de variável $i = k+2$ seguida da aplicação da fórmula de adição do índice superior conduzem a

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k+2}{3} = \sum_{i=3}^{n+2} \binom{i}{3} = \binom{n+3}{4}.$$

Para a segunda soma em (2), uma aplicação da fórmula de adição do índice superior conduz a

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}.$$

Como resultado final, obtém-se então

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{3} n \left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1), \quad n \geq 3.$$

Os casos $n = 1$, $n = 2$ devem ser analisados separada e independentemente.

**5.3.** Dado um elemento $(a, b, c) \in S$, por definição do conjunto $S$, $a < b$ e $a < c$. Logo, $a \in [99]$. Fixado o valor de $a$, existem então $100 - a$ possibilidades para o valor de $b$ e $100 - a$ possibilidades para o valor de $c$. Ou seja, fixado o valor de $a$, o número de elementos $(a, b, c)$ do conjunto $S$ é igual a $(100 - a)^2$. Como $a \in [99]$, tem-se assim que o conjunto $S$ contém

$$\sum_{a=1}^{99} (100 - a)^2 = \sum_{a=1}^{99} a^2$$

elementos, em que, pela alínea 5.2,

$$\sum_{a=1}^{99} a^2 = \frac{99}{3}\left(99 + \frac{1}{2}\right)(99 + 1) = 328350.$$

**6. Case Base: $\mathbf{n=0}$**. Neste caso tem-se

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}2^k = 1 = 3^0$$

o que prova que o caso base verifica-se.

**Hipótese de indução:** Dado $n \geq 0$, **qualquer**, suponhamos que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = 3^n.$$

Para $n+1$ tem-se então

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}2^k = 1 + \binom{n+1}{n+1}2^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}2^k = 1 + 2^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}2^k,$$

em que, por uma aplicação da lei de Pascal,

$$1 + 2^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}2^k = 2^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}2^k.$$

Relativamente à última soma, note-se que mediante a mudança de variável $j = k-1$ obtém-se

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}2^k = 2\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}2^j = 2\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j - 2^{n+1}.$$

Assim,

$$2^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k + 2\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j,$$

o que permite concluir, por aplicação da hipótese de indução, que

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k + 2\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j = 3^n + 2\times 3^n = 3^{n+1}.$$

Pelo método de indução matemática, podemos assim concluir que, para qualquer número natural $n \geq 0$, é válida a igualdade

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = 3^n.$$

**7.1.** Pela fórmula da extracção tem-se

$$\sum_{k=1}^{n}k^2(k-1)\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=2}^{n}(k-1)\left(k\binom{n}{k}\right)^2 = n^2\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}^2,$$

em que por uma mudança de variável, $i = k-1$, e por uma nova aplicação da fórmula da extracção,

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}^2 = \sum_{i=1}^{n-1}i\binom{n-1}{i}\binom{n-1}{i} = (n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-2}{i-1}\binom{n-1}{i}.$$

Finalmente, pela lei da simetria e pela convolução Vandermonde,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-2}{i-1}\binom{n-1}{i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-2}{n-1-i}\binom{n-1}{i} = \binom{2n-3}{n-1}$$

e, portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2(k-1)\binom{n}{k}^2 = n^2\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}^2 = n^2(n-1)\binom{2n-3}{n-1} = n^2(n-1)\binom{2n-3}{n-2},$$

onde a última igualdade resulta de uma nova aplicação da lei da simetria.

**7.2.** Esta alínea resolve-se por aplicação directa da anterior, observando que para $k \neq 0$, $k \neq 1$,

$$\begin{aligned} k^2(k-1)\binom{n}{k}^2 = \frac{k^2(k-1)(n!)^2}{(k!(n-k)!)^2} &= \frac{k^2(k-1)(n!)^2}{k(k-1)!k(k-1)(k-2)!((n-k)!)^2} \\ &= \frac{(n!)^2}{(k-1)!(k-2)!((n-k)!)^2}. \end{aligned}$$

Logo, pela alínea 7.1,

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{(j-1)!(j-2)!((n-j)!)^2} &= \frac{1}{(n!)^2}\sum_{k=2}^{n} k^2(k-1)\binom{n}{k}^2 \\ &= \frac{1}{(n!)^2}\sum_{k=1}^{n} k^2(k-1)\binom{n}{k}^2 \\ &= \frac{n^2}{(n!)^2}(n-1)\binom{2n-3}{n-2} \\ &= \frac{(2n-3)!}{((n-2)!(n-1)!)^2}, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade se utilizou o facto de $k^2(k-1)\binom{n}{k}^2 = 0$ para $k = 1$.