UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21002

Álgebra Linear I

26 de fevereiro de 2014

- O exame é composto por **6** grupos de questões e respetivas alíneas, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos **II**, **III**, **IV**, **V** e **VI** deverão ser respondidas no Caderno de Prova. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que correctos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. As restantes questões terão as cotações seguintes:

II	**III**	**IV**	**V**	**VI**
2.0 val.	3.0 val.	5.0 val.	4.0 val.	2.0 val.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

Questão 1

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$. Então:

- ☐ **a)** AB é invertível.
- ☐ **b)** BA é invertível.
- ☐ **c)** $AB = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right]$.
- ☐ **d)** $BA = [9]$.

Questão 2

Considere os subespaços de $\mathbb{R}^2$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x\} \text{ e } G = \langle (1, 0); (1, -1) \rangle .$$

Considere as afirmações seguintes:

1. $\dim F = 2$.
2. $\dim F = 1$.
3. $\dim G = 2$.

Então:

- ☐ **a)** Nenhuma das afirmações é verdadeira.
- ☐ **b)** Apenas uma das afirmações é verdadeira.
- ☐ **c)** Apenas duas das afirmações são verdadeiras.
- ☐ **d)** Todas as afirmações são verdadeiras.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questão 3

Sejam $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$, e $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$, $A\mathbf{w} = \mathbf{w}$. Então:

- ☐ **a)** 1 não é valor próprio de A.
- ☐ **c)** A é invertível..
- ☐ **b)** A é diagonalizável.
- ☐ **d)** $\det A = 3$.

Questão 4

Considere as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, definidas por

$$A = \begin{bmatrix} u & v & w \\ v & x & y \\ w & y & z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} u & v & w \\ v & x & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suponha que $\det A = 3$, e considere as afirmações:

1. $\det(A + B) = 12$.
2. $\det(A^\top + B) = 3$.
3. $\det(A - 2B) = 3$.
4. $\det(3A^{-1}) = 9$.

Então:

- ☐ **a)** Apenas uma das afirmações é verdadeira.
- ☐ **b)** Apenas duas das afirmações são verdadeiras.
- ☐ **c)** Apenas três das afirmações são verdadeiras.
- ☐ **d)** Todas as afirmações são verdadeiras.

Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ então o produto A^k está definido para qualquer $k \in \mathbb{N}$ se e sómente se $m = n$.

b) Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é tal que $A^2 = 0$ então $A = 0$.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

III. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + y + 5z = 3 \\ 2x + 5y + 5z = 3 \end{cases}$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

IV. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

a) Determine os valores próprios de A.

b) Será a matriz A diagonalizável? Justifique a sua resposta.

c) Determine os vetores próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea a).

d) Determine se é possível escrever A na forma $A = PDP^{-1}$, onde $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível e $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é uma matriz diagonal. Em caso afirmativo determine matrizes P e D nessas condições.

V. Considere a função $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, a-d, b-c, d-c).$$

a) Mostre que T é linear.

b) Determine uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e uma base de $\mathbb{R}^4$.

c) Calcule a representação matricial de T em relação às bases indicadas na alínea anterior.

d) Determine o núcleo de T e indique uma base para o núcleo de T.

e) Determine a dimensão da imagem de T.

f) Indique se existem matrizes $M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $T(M) = (1, 1, 1, 1)$.

VI. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:

i) $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é uma sequência linearmente independente.

ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})$ é uma sequência linearmente independente.

FIM