e-Fólio B

Nome: ……………………………………………………………………………………….

B.I.: ……………………………. Nº. de estudante: ……………………………………..

Licenciatura: ………………………………………………………………………………..

Unidade Curricular: Cálculo para Informática   Código: 21157

Data: …………….   Ano lectivo: 2014/15

Docente: Luis Gonzaga Albuquerque   Classificação: ………………………………..

PARA A RESOLUÇÃO DO e-FÓLIO B, ACONSELHA-SE QUE:

- Preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-fólio B é composto por seis grupos de problemas, num total de duas páginas e termina com a palavra FIM. As suas respostas aos problemas deste e-fólio não podem ultrapassar doze páginas; páginas adicionais não serão classificadas.
- Escreva com letra legível ou usando um processador de texto matemático conveniente.
- Depois de ter realizado o e-fólio produza um único documento digital (de preferência pdf) que deve incluir esta folha de rosto e insira-o na página moodle da unidade curricular em e-fólio B até às 23h55 do dia 13 de Janeiro.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.
- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, a correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a respostas não justificadas.

1 Prove que a sucessão x_n tal que $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ é convergente e calcule o seu limite.

Se $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ então deverá ter-se que $x = \sqrt{2x}$ uma vez que $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ (Ver ex1 da 1ª actividade formativa) e $\sqrt{2x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2x}$ pois $f(x) = \sqrt{2x}$ é uma função contínua. Resolvendo a equação $x = \sqrt{2x}$ tem-se $x^2 = 2x$ ou seja $x(x-2) = 0$ que tem como soluções $x = 0{,}2$.

Se provarmos que $x_n < 2$ todo o $n \in N$, e que a sucessão x_n é crescente tem-se que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ uma vez que toda a sucessão crescente e limitada superiormente é convergente e como $x_1 = \sqrt{2} > 0$ a sucessção não pode admitir zero como solução

Vamos provar por indução que $x_n < 2$ para todo o $n \in N$, a propriedade é válida para $n = 1$ pois $x_1 = \sqrt{2} < 2$, supondo que $x_n < 2$ vamos provar que $x_{n+1} < 2$ ora $x_{n+1} = \sqrt{2x_n} < \sqrt{2 * 2} = 2$

Para provar que a sucessão é crescente, vamos provar por indução que se tem $x_{n+1} > x_n$ para todo o $n \in N$, a propriedade é válida para $n = 1$ pois $x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} > x_1$ supondo que $x_{n+1} > x_n$ queremos provar que $x_{n+2} > x_{n+1}$ o que acontece pois $x_{n+2} = \sqrt{2x_{n+1}} > \sqrt{2x_n} = x_{n+1}$ logo a sucessão dada é convergente e tem como limite o valor 2.

2 Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\log(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\log(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\log(1+x)}{x\log(1+x)}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\log(1+x)}{x^2}\right)$ uma vez que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\log(1+x)}{x}\right) = 1$ aplicando a regra de Cauhy tem-se

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\log(1+x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{x}{1+x}}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2x(1+x)}\right)=\frac{1}{2}$$

3 Prove que não existe m tal que $f(x)=x^2-2x+m=0$ tenha dois zeros distintos no intervalo $[0,1]$

Não se pode ter $\alpha,\beta\in[0,1]$ tal que $\alpha\neq\beta$ e $f(\alpha)=f(\beta)=0$ pois pelo teorema de Rolle deveria existir $c\in\,]0,1[$ tal que $f'(c)=0$ ora $f'(x)=2x-2$ e só se anula para $x=1$

4 De todos os triângulos rectângulos de hipotenusa igual a 4,determine o de área máxima. .

Designando as medidas dos catetos *a* e *b* respectivamente por x e y tem-se pelos dados do problema que $x^2+y^2=16$ logo $y=\sqrt{16-x^2}$ devendo-se maximizar a função $f(x)=\dfrac{x\sqrt{16-x^2}}{2}$ tem-se $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}\right)$ que admite como único zero $\sqrt{8}\ (x>0)$ que corresponde a um máximo uma vez que para $x<\sqrt{8}$ $f'(x)>0$ e para $x>\sqrt{8}$ $f'(x)<0$ logo $x,y=\sqrt{8}$ e a área máxima. de todos os triângulos rectângulos de hipotenusa igual a 4 é igual a $\dfrac{\sqrt{8}\sqrt{8}}{2}=4$

5 Prove que para $x>0$ se tem $1-\dfrac{x}{2}<\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}<1-\dfrac{x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$

Seja $g(x)=\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$ pelo teorema de Lagrange tem-se que $g(x)-1=xg'(c)$ em que $0<c<x$ ora $g'(x)=\frac{-1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$ por um lado $2(1+c)^{\frac{3}{2}}>2$ logo $\frac{1}{2(1+c)^{\frac{3}{2}}}<\frac{1}{2}$ e $\frac{-x}{2(1+c)^{\frac{3}{2}}}>\frac{-x}{2}$ ou seja $g(x)-1>\frac{-x}{2}$ logo $1-\frac{x}{2}<\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$

Por outro lado $2(1+c)^{\frac{3}{2}}<2(1+x)^{\frac{3}{2}}$ logo $\frac{-x}{2(1+c)^{\frac{3}{2}}}<\frac{-x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$ ou seja $g(x)-1<\frac{-x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$ logo $\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}<1-\frac{x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$ donde o resultado.

6 Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{\log(1+x)sen^2(x)}$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{\log(1+x)sen^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$ uma vez que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{x^2}=1$ aplicando sucesssivamente a regra de Cauhy tem-se $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{6}=\frac{1}{6}$

FIM