Resolução do efólio A

Álgebra Linear I **Código:** 21002

I. Questões de escolha múltipla.

> Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

1. Considere as seguintes matrizes:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 16 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então:

- ☐ **a)** $\det(3DC^{-1}) = 3$.
- ☒ **b)** $\det(3DC^{-1}) = 27$.
- ☐ **c)** $\det(3DC^{-1}) = 9$.
- ☐ **d)** $\det(3DC^{-1}) = 1/3$.

2. Considere a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

O sistema de equações que corresponde a esta matriz é:

- ☐ **a)** $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + 3z + w = 4 \\ 5x + 2z = 3 \quad x = 0 \end{cases}$
- ☒ **b)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y + 5z = 2 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ y = 4 \end{cases}$
- ☐ **c)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y + 5z = 2 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ y = 4 \end{cases}$
- ☐ **d)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y + 5z = 2 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ z = 4 \end{cases}$

3. A matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & k & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ não é invertível para

- ☐ **a)** $k = 0$
- ☐ **b)** $k = 1$
- ☒ **c)** $k = 2$
- ☐ **d)** $k = 3$

4. Seja $\mathbb{R}[x]$ o espaço vetorial dos polinómios na variável real x, e consideremos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}[x]$:

(i) $S_1 = \{p \in \mathbb{R}[x] \colon p(0) = 1\}$,

(ii) $S_2 = \{p \in \mathbb{R}[x] \colon p(0) = p(1) = 0\}$,

(iii) $S_3 = \{p \in \mathbb{R}[x] \colon p'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Então:

☐ **a)** S_1 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}[x]$.

☐ **b)** S_2 não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}[x]$.

☒ **c)** S_2 e S_3 são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}[x]$.

☐ **d)** S_1, S_2 e S_3 são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}[x]$.

II. Aplicando o *Método de Eliminação de Gauss*, determine para que valores de a a matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível, e para esses valores calcule R^{-1} usando o *Método de Eliminação de Gauss-Jordan* aplicado à matriz $[R|I_4]$.

III. Utilizando o *Teorema de Laplace* calcule o valor de

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

IV. Considere as matrizes $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha^2+1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

a) Estude a característica da matriz A_α. Determine todos os valores de α tais que A_α seja invertível.

b) Considere agora $\alpha = -1$ e defina $A := A_{-1}$.

i) Determine $\operatorname{adj} A$ e A^{-1}, por esta ordem.

ii) Use a matriz A^{-1} para resolver o sistema $AX = 0$.

iii) Resolva o sistema $AX = B$ pelo método de Cramer.

V. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível tal que $A^{-1} = A^\top$. Mostre que $\det(A^2) = 1$.

VI. Considere matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $\det(A+B) = \det A$. Será que se tem necessariamente $\det B = 0$?

FIM

Grupo I.
1.
Como todas as matrizes envolvidas são matrizes 3×3 tem-se

$$\det(3CD^{-1}) = 3^3 \det(CD^{-1}) = 3^3 \det C \det(D^{-1}) = 3^3 \det C \ (\det D)^{-1}.$$

Por outro lado $\det C \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_2}{=}} 4(16-15) = 4$ e $\det D = 2 \times 2 \times 1 = 4$ e portanto $(\det D)^{-1} = 1/4$. Conclui-se assim que $\det(3CD^{-1}) = 3^3 \det C \ (\det D)^{-1} = 3^3 \times 4 \times \frac{1}{4} = 27$. Assim, a alínea certa é a alínea b).
2.
Facilmente se verifica que a alínea certa é a alínea b).
3.
Aplicando a regra de Laplace à 1ª coluna da matriz tem-se

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & k & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 3(3k-2) - 2 \times 6 = 3(3k-2-4) = 9(k-2) = 0 \iff k = 2.$$

Assim, a alínea certa é a alínea c).
4.
S_1 não é um subespaço de $\mathbb{R}[x]$. Em S_1 nenhuma das condições de subespaço é verificada.

Por exemplo, dados 2 polinómios $p, q \in S_1$, tem-se $p(0) = 1 = q(0)$ e portanto $p(0)+q(0) = 1 + 1 = 2$ mas por definição $(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 2 \neq 1$, logo $p + q \notin S_1$.

O polinómio nulo também não pertence a S_1 pois o seu valor em 0 é 0, e portanto não verifica $p(0) = 1$.

Finalmente se multiplicarmos um polinómio de S_1 por uma constante $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, então $(\lambda p)(0) = \lambda p(0) = \lambda \neq 1$.

Tanto S_2 como S_3 são subespaços de $\mathbb{R}[x]$ pois satisfazem as condições de subespaço. Assim, a alínea certa é a alínea c).
Grupo V.
Para este exercício convinha usar as seguintes propriedades, válidas para qualquer matriz A invertível:

i) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$;

ii) $\det(A^\top) = \det A$;

iii) $(\det A)^2 = \det(A^2)$.

Por hipótese $A^{-1} = A^\top$ e portanto usando i)(*à esquerda*) e ii)(*à direita*) tem-se que $\det A^{-1} = \det A^\top \Rightarrow (\det A)^{-1} = \det A$, e multiplicando esta última igualdade por $\det A$ dos 2 lados tem-se $1 = \det A \times \det A$. Usando agora iii) vem $1 = \det A \times \det A = (\det A)^2 = \det(A^2)$.
Grupo VI.
Uma vez que sabemos que em geral é falso que $\det(A + B) = \det A + \det B$, com um pouco de paciência era fácil construir um exemplo em que $\det B \neq 0$.

Tomando por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ tem-se } \det(A+B) = 1 = \det A \text{ e } \det B = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

II. Considerando que $R \in \mathcal{M}_{4x4}(\mathbb{R})$ e que a matriz já está em forma de escada, não é necessária mais qualquer transformação pelo método de eliminação de Gauss. Assim, e como $r(R) = 4$, a matriz R é invertível $\forall a \in \mathbb{R}$. Pelo método de eliminação de Gauss-Jordan temos:

$$[R|I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+al_4]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2+al_3]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1+al_2]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I_4|R^{-1}]$$

III. Utilizando o *Teorema de Laplace* calcule o valor de

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Resolução</u> :

Cálculo do determinante da matriz do enunciado (que designei por A) utilizando o *Teorema de Laplace* . As seguintes notações, para o determinante, são equivalentes : $\det A = \det(A) = |A|$.

Foi aplicado o teorema à quarta linha, pois é uma das linhas que tem maior número de elementos iguais a zero e além disso, essa linha tem elementos com valores 1 e -1 .

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{Lapl.}{\underset{\ell_4}{=}} (-1)^{4+1}\cdot 1 \overbrace{\begin{vmatrix} -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}^{d_1} +$$

$$+\ (-1)^{4+3}\cdot(-1)\overbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 7 & 4 & -1 & 11 & -5 \\ 9 & -4 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}^{d_2} +\ (-1)^{4+5}\cdot 1\overbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & -5 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}^{d_3} = -d_1 + d_2 - d_3$$

Ficamos assim com 3 determinantes para calcular, designados por d_1, d_2 e d_3 . Para aplicação do teorema, foi escolhida a quinta linha para estes determinantes (e a segunda linha e a segunda coluna nos níveis seguintes), pelas razões anteriormente expostas. Para simplificação de escrita, serão omitidos os termos (-1) de expoente par e substituídos os termos (-1) de expoente ímpar, por troca de sinal. Há um determinante parcial que se repete com frequência designado por d_4 .

$$\boldsymbol{d_1} \overset{Lapl.}{\underset{\ell_5}{=}} -\begin{vmatrix} -3 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 11 & -5 \\ -4 & 1 & 13 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 7 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & -5 \\ -4 & 11 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{Lapl.}{\underset{\ell_2}{=}} -4\begin{vmatrix} -3 & 1 & 11 \\ 4 & -1 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 1 & 11 \\ 4 & -1 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-\overbrace{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 11 \\ 4 & -1 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}^{d_4} \overset{Lapl.}{\underset{c_2}{=}} -\overbrace{\left(-\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 11 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 11 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\right)}^{d_4} = (8-20) + (-6+44) + (15-44) = \overset{d_4=3}{\overbrace{-3}}$$

$$\boldsymbol{d_2} \overset{Lapl.}{\underset{\ell_5}{=}} 4\begin{vmatrix} -3 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 11 & -5 \\ -4 & 1 & 13 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -1 & -5 \\ 9 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{Lapl.}{\underset{\ell_2}{=}} 4\cdot 4\overbrace{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 11 \\ 4 & -1 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}^{d_4} - \overbrace{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 11 \\ 4 & -1 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}^{d_4} = 15\,d_4 = 45$$

$$\boldsymbol{d_3} \overset{Lapl.}{\underset{\ell_5}{=}} 4\begin{vmatrix} -3 & 7 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & -5 \\ -4 & 11 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -1 & -5 \\ 9 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{Lapl.}{\underset{\ell_2}{=}} 4\cdot 3\overbrace{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 11 \\ 4 & -1 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}^{d_4} - \overbrace{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 11 \\ 4 & -1 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}^{d_4} = 11\,d_4 = 33$$

Então $\det(A) = -d_1 + d_2 - d_3 = 3 + 45 - 33 = 15$.

IV.

a)

Começando por analisar a caracterísca da matriz A_α, facilmente se verifica que esta depende dos valores de α. Se os valores de α forem tais que A_α é invertível, então $r(A_\alpha) = n = 3$, pois existe uma matriz equivalente por linhas a A_α, na sua forma de escada reduzida tal que $A_\alpha \underset{\text{(linhas)}}{\longrightarrow} I_3$. De forma análoga, se A_α não for invertível, $r(A_\alpha) < n = 3$.

Determinando os valores de α para os quais A_α é invertível, através do seu determinante (pois se A_α é invertível $\det(A_\alpha) \neq 0$):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha^2+1 \end{vmatrix} \overset{Lapl.}{\underset{l_3}{=}} \alpha(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} + \left(\alpha^2+1\right)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} = (-\alpha)(\alpha+\alpha) + \left(\alpha^2+1\right)(\alpha)$$

$$= \alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)$$

$$\alpha = 0 \ \vee \ \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha = 0 \ \vee \ \alpha = 1$$

Pelo que se conclui que A_α é invertível para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Logo para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ $r(A_\alpha) = 3 = n$.

Verificando agora a característica da matriz para os valores de α para os quais A_α não é invertível:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_2+l_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_3-l_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (f.e.r)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_2+l_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_2 \leftrightarrow l_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (f.e.r)$$

Pelo que se conclui que:

$$r\left(A_\alpha\right) = \begin{cases} 3 & \text{se } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \\ 2 & \text{se } \alpha{=}0 \vee \alpha{=}1 \end{cases}$$

b)

$$A_{(-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & (-1)^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

i)

$$\operatorname{Adj}\left(A_{(-1)}\right) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Cálculo da inversa a partir da adjunta:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

$$\det A_{(-1)} = \alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha = (-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) = -4$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

ii)

Porque $A_{(-1)}$ é uma matriz quadrada e invertível, o sistema de equações lineares $AX = B$ é um sistema de Cramer. Sendo assim, é possível afirmar que:

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Neste caso $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, pelo que $X = A^{-1}B$:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo a solução do sistema é $S = (0,\ 0,\ 0)$.

iii)

Resolvendo o sistema AX=B pelo método de Cramer:

$$x_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{4}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{l_1}{\overset{Lapl.}{=}} (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$x_1 = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{4}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{Lapl.}{\underset{l_3}{=}} 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{4}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{Lapl.}{\underset{l_1}{=}} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$x_3 = \frac{1}{4}$$

Pelo que a solução do sistema $AX = B$ é $S = \left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$.