UNIVERSIDADE ABERTA
www.univ-ab.pt

e-Fólio A

cartão de aprendizagem

Nome: ....

B.I./C.C.: .... **Nº de Estudante:** ....

Licenciatura: .... **Turma:** ....

Unidade Curricular: Álgebra Linear I **Código:** 21002

Data: .... **Ano Letivo:** 2013/2014

Docente: Rafael Sasportes **Classificação:** ....

Para a resolução do **e-Fólio A**, aconselha-se que:

- Preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 6 grupos de questões, num total de 3 páginas e termina com a palavra FIM. As *suas respostas* às questões deste e-Fólio não podem ultrapassar **nove** páginas A4; páginas adicionais não serão classificadas.
- Escreva sempre com letra legível ou usando um processador de texto matemático conveniente.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um único documento digital (em formato *pdf*), incluindo obrigatoriamente esta folha de rosto e a página com as questões de escolha múltipla, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em "e-Fólio A" até ao dia 2 de dezembro.

Critérios de avaliação e cotação:

- A cotação total deste e-Fólio é de **4 valores**.
- Exceto nas questões de escolha múltipla, justifique *cuidadosa e detalhadamente* todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.
- Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores. Os Grupos II a VI têm cotação de 0.6 valores cada.

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

1. Considere as seguintes matrizes:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 16 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então:

☐ **a)** $\det(3DC^{-1}) = 3$.

☐ **b)** $\det(3DC^{-1}) = 27$.

☐ **c)** $\det(3DC^{-1}) = 9$.

☐ **d)** $\det(3DC^{-1}) = 1/3$.

2. Considere a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

O sistema de equações que corresponde a esta matriz é:

☐ **a)** $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + 3z + w = 4 \\ 5x + 2z = 3 \quad x = 0 \end{cases}$

☐ **b)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y + 5z = 2 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

☐ **c)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y + 5z = 2 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

☐ **d)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y + 5z = 2 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ z = 4 \end{cases}$

3. A matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & k & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ não é invertível para

☐ **a)** $k = 0$

☐ **b)** $k = 1$

☐ **c)** $k = 2$

☐ **d)** $k = 3$

4. Seja $\mathbb{R}[x]$ o espaço vetorial dos polinómios na variável real x, e consideremos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}[x]$:

(i) $S_1 = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(0) = 1\}$,

(ii) $S_2 = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(0) = p(1) = 0\}$,

(iii) $S_3 = \{p \in \mathbb{R}[x] : p'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Então:

☐ **a)** S_1 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}[x]$.

☐ **b)** S_2 não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}[x]$.

☐ **c)** S_2 e S_3 são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}[x]$.

☐ **d)** S_1, S_2 e S_3 são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}[x]$.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Aplicando o *Método de Eliminação de Gauss*, determine para que valores de a a matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível, e para esses valores calcule R^{-1} usando o *Método de Eliminação de Gauss-Jordan* aplicado à matriz $[R|I_4]$.

III. Utilizando o *Teorema de Laplace* calcule o valor de

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

IV. Considere as matrizes $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha^2+1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

- **a)** Estude a característica da matriz A_α. Determine todos os valores de α tais que A_α seja invertível.
- **b)** Considere agora $\alpha = -1$ e defina $A := A_{-1}$.
  - **i)** Determine $\operatorname{adj} A$ e A^{-1}, por esta ordem.
  - **ii)** Use a matriz A^{-1} para resolver o sistema $AX = 0$.
  - **iii)** Resolva o sistema $AX = B$ pelo método de Cramer.

V. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível tal que $A^{-1} = A^\top$. Mostre que $\det(A^2) = 1$.

VI. Considere matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $\det(A + B) = \det A$. Será que se tem necessariamente $\det B = 0$?

FIM