UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

U.C. 21157

Cálculo para Informática

28 de Janeiro de 2015

-- INSTRUÇÕES --

- O tempo de duração da prova de exame é de 2 horas, acrescida de 30 minutos de tolerância. O tempo de duração da prova de p-fólio é de 90 minutos.
- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Sempre que não utilize o enunciado da prova para resposta, poderá ficar na posse do mesmo.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas.
- Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- A prova é constituída por 2 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.
- Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este exame tem a cotação total de 20 valores, distribuídos do seguinte modo: Grupo I: 4 valores, Grupo II: 9 valores, Grupo III: 7 valores.
- Não é permitida a utilização de quaisquer tabelas ou formulários.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular.

Grupo I (4 valores)

Prove que a sucessão x_n tal que $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_{n+1} = \frac{(x_n)^2}{2}$ é convergente e calcule o seu limite.

Tem-se que $x_n > 0$ para $n \geq 1$ uma vez que $x_1 = \frac{1}{2} > 0$ e se $x_n > 0$ então $x_{n+1} = \frac{(x_n)^2}{2} > 0$ logo a sucessão dada é limitada imferiormente por zero.

Vamos ver que é uma sucessão decrescente, $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{1}{8}$ logo $x_2 < x_1$ por outro lado se $x_{n+1} < x_n$ então $x_{n+2} = \frac{(x_{n+1})^2}{2} < \frac{(x_n)^2}{2} = x_{n+1}$ logo a sucessão é convergente uma vez que é é limitada imferiormente e é decrescente,se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = x$ uma vez que x_{n+1} é uma subsucessão de x_n logo deve ter-se $x = \frac{(x)^2}{2}$ ou seja $x(2-x) = 0$ logo $x = 0$ ou $x = 2$ e como a sucessão é decrescente e $x_1 = \frac{1}{2}$ $x \neq 2$ e tem-se que $x = 0$

Grupo II (9 valores)

1. Prove que a função $f(x) = x^7 + 4x - 4$ tem um único zero em *R*.

$f(0) = -4 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$ logo $\exists x_{0,} x_1 : x_0 < x_1,\ f(x_0) < 0,\ f(x_1 > 0)$ e como se $h : [a,b] \to R$ é contínua com $h(a)$ e $h(b)$ de sinais contrários h tem pelo menos um zero em $]a,b[$ deduz-se a existência de um zero da função *f* que é único pois pelo teorema de Rolle , se existisse mais do que um zero então a derivada da função deveria anular-se pelo menos num ponto, mas $f'(x) = 7x^6 + 4 > 0$ nunca se anula e por conseguinte a função tem um único zero.

2. Calcule o $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-x}}{x}-\frac{1}{e^{x}-1}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-x}}{x}-\frac{1}{e^{x}-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}-x}{\left(e^{x}-1\right)x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}-x}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}}{2}=\frac{-1}{2} \text{ pois } \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

3. Prove que se $0<a<x$ então $\frac{\log(x)}{x}<\frac{\log(a)}{x}+\frac{1}{a}$

$\log(x)-\log(a)=\frac{x-a}{c}$ $\quad 0<a<c<x$ logo $\frac{\log(x)}{x}-\frac{\log(a)}{x}=\frac{x-a}{xc}$ ora $\frac{x-a}{x}<1$ e $\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$ donde o resultado.

Grupo III (7 valores)

1. Calcule $\int x^{7}\cos\left(x^{4}\right)dx$

$\int x^{7}\cos\left(x^{4}\right)dx=\frac{1}{4}\int x^{4}4x^{3}\cos\left(x^{4}\right)dx$ vamos utilizar a primitivação por partes para o cálculo desta primitiva, tem-se que $\int u'v dx=uv-\int uv'dx$ fazendo $u'=4x^{3}\cos\left(x^{4}\right)$ e $v=x^{4}$ obtemos, $u=sen\left(x^{4}\right)$ pois $\int 4x^{3}\cos\left(x^{4}\right)dx$ é uma primitiva do tipo $\int f(\varphi(x))\dot{\varphi}(x)dx$ com $\varphi(x)=x^{4}$ e $f(z)=\cos(z)$ e $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F(\varphi(x))+k$ em que $F(z)=\int f(z)dz$ por outro lado $v'=4x^{3}$ logo $\frac{1}{4}\int x^{4}4x^{3}\cos\left(x^{4}\right)dx=\frac{1}{4}\left(x^{4}sen\left(x^{4}\right)-\int 4x^{3}sen\left(x^{4}\right)dx\right)$ $\int 4x^{3}sen\left(x^{4}\right)dx$ é de novo uma primitiva do tipo $\int f(\varphi(x))\dot{\varphi}(x)dx$ com $\varphi(x)=x^{4}$ e $f(z)=sen(z)$

tendo-se $\int 4x^3 sen(x^4)dx = -\cos(x^4)$ logo

$$\int x^7 \cos(x^4)dx = \frac{1}{4}\left(x^4 sen(x^4) + \cos(x^4)\right) + k$$

2. Calcule $\int \frac{\log(x)}{x^4} dx \quad (x > 0)$

Fazendo a substituição $x = e^t$ tem-se $\frac{dx}{dt} = e^t$ devendo-se calcular $\int \frac{te^t}{e^{4t}} dt = \int te^{-3t} dt$ vamos utilizar a primitivação por partes para o cálculo desta primitiva, tem-se que $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$ fazendo $u' = e^{-3t}$ e $v = t$ obtemos,

$\int te^{-3t} dt = \frac{-te^{-3t}}{3} + \int \frac{e^{-3t}}{3} dt = \frac{-te^{-3t}}{3} - \frac{1}{9} e^{-3t} + k$ e desfazendo a substituição tem-se $\int \frac{\log(x)}{x^4} dx = \frac{-\log(x)}{3x^3} - \frac{1}{9x^3} + k$

FIM