p-Fólio

U.C. 21002
Álgebra Linear I

31 de janeiro de 2017

- O p-fólio é composto por **4** grupos de questões e respetivas alíneas, contém 5 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos **II**, **III** e **IV** deverão ser respondidas no Caderno de Prova. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o p-fólio tem a duração máxima de **1 hora e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. A cotação das restantes questões é a seguinte:

II	**III**	**IV**
1.5 val.	3.5 val.	4 val.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

I. Questões de escolha múltipla.

> Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

Questão 1

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz que satisfaz $A^2 - I_n = 0$, onde I_n designa a matriz identidade de ordem n. Então:

☐ a) $A = I_n$.

☐ b) $\det A = 0$.

☐ c) $A^{-1} = A$.

☐ d) $A^{-1} = I_n$.

Questão 2

Sejam F e G subespaços de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$F = \langle (1,0,1),(1,2,1) \rangle \text{ e } G = \langle (0,0,1),(1,1,1),(1,2,3) \rangle.$$

Então:

☐ a) $\dim(F+G) = 3$.

☐ b) $\dim(F \cap G) = 0$.

☐ c) $\dim(F+G) = 4$.

☐ d) $\dim F = 1$.

Questão 3

Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz com um valor próprio λ e vetor próprio associado u. Então:

☐ a) $\det A = \lambda$.

☐ b) u não é vetor próprio de A^3.

☐ c) u é vetor próprio de $3A$.

☐ d) u não é vetor próprio de $A + 3I_3$.

Soluções:

Questão 1: c)

Questão 2: a)

Questão 3: c)

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa a afirmação seguinte, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

Se 1 é valor próprio de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ então $\det(A - I_n) = 0$.

Soluções:

A proposição é verdadeira, tendo-se mesmo uma equivalência (proposição 6.14 pág. 374, 3ª edição).

III. Para α real considere a matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2-\alpha & 2+\alpha \\ -1 & -3 & -2+\alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Para cada α real determine a característica e a nulidade[1] da matriz A_α.

Soluções:

Fazendo operações sucessivas sobre as linhas da matriz A_α tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2-\alpha & 2+\alpha \\ -1 & -3 & -2+\alpha & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_4+\ell_1]{\substack{\ell_2-\ell_1 \\ \ell_3+\ell_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1+\alpha \\ 0 & -2 & \alpha & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_4+2\ell_2]{\ell_3-\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_3+\ell_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \longleftrightarrow \ell_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha = 0$ a característica é igual a 2 e se $\alpha \neq 0$ a característica é igual a 4.

Como pela proposição 4.69 (pág. 268, 3ª edição) $\dim \mathcal{N}(A_\alpha) = 4 - \mathrm{r}(A_\alpha)$ temos que $\dim \mathcal{N}(A_0) = 4 - 2 = 2$ e no caso em que $\alpha \neq 0$ a dimensão do núcleo é zero.

b) Determine bases para $\mathcal{N}(A_\alpha)$ e para $\mathcal{C}(A_\alpha)$ (*o núcleo e o espaço das colunas de* A_α).

---

[1] A nulidade de A_α é a dimensão do seu núcleo $\mathcal{N}(A_\alpha)$.

Soluções:

Se $\alpha = 0$ o núcleo é constituído pelas soluções do sistema

$$\begin{aligned} x + y + 2z - w &= 0 \\ y + w &= 0. \end{aligned}$$

A sequência $((-2, 1, 0, -1); (-2, 0, 1, 0))$ é uma base para o núcleo no caso $\alpha = 0$.

Uma vez que no caso $\alpha = 0$ a matriz tem característica 2, o espaço das colunas tem dimensão 2 e podemos escolher para base do espaço das colunas de A_0, 2 colunas linearmente independentes, por exemplo as 2 primeiras. A sequência $((1, 1, -1, -1); (1, 2, 0, -3))$ é uma base para o espaço das colunas no caso $\alpha = 0$.

Se $\alpha \neq 0$ o núcleo é constituído apenas pelo vetor nulo. O espaço das colunas tem dimensão 4 e portanto coincide com $\mathbb{R}^4$, e quaisquer 4 vetores linearmente independentes formam uma base. A base canónica de $\mathbb{R}^4$ é uma base do espaço das colunas.

c) Calcule o determimante de A_α e determine os valores de α para os quais a matriz A_α é invertível.

Soluções:

A última matriz que obtivemos na alínea a) é triangular e tem determinante igual a α^2 e portanto, como efetuámos uma troca de linhas, o determinante de A_α é igual a $-\alpha^2$, e concluimos que A_α é invertível para $\alpha \neq 0$.

d) Calcule a matriz inversa de A_α sempre que possível.

Soluções:

Para $\alpha \neq 0$ podemos calcular a inversa de A_α usando condensação, ou seja

$$[A_\alpha | I_4] \xrightarrow{\text{(linhas)}} [I_4 | A_\alpha^{-1}].$$

Em alternativa como já calculámos o determinante de A_α podemos usar o método da adjunta

$$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{\det A_\alpha} \operatorname{adj} A_\alpha = \frac{-1}{\alpha^2} \operatorname{adj} A_\alpha,$$

onde $\operatorname{adj} A_\alpha$ é a matriz transposta da matriz dos complementos algébricos. Para calcular a matriz dos complementos algébricos temos de calcular 16 determinantes 3×3, obtendo-se

$$\operatorname{adj} A_\alpha = \begin{bmatrix} -2\alpha^2 - 4\alpha & \alpha^2 + \alpha & \alpha & -\alpha \\ \alpha^2 + 2\alpha & -\alpha^2 + \alpha & -2\alpha & -\alpha \\ -2\alpha & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha & -\alpha \end{bmatrix}^\top,$$

e portanto

$$\begin{aligned} A_\alpha^{-1} = \frac{-1}{\alpha^2} \operatorname{adj} A_\alpha &= \frac{-1}{\alpha^2} \begin{bmatrix} -2\alpha^2 - 4\alpha & \alpha^2 + 2\alpha & -2\alpha & 0 \\ \alpha^2 + \alpha & -\alpha^2 + \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & -2\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\alpha & -\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 + 4/\alpha & -1 - 2/\alpha & 2/\alpha & 0 \\ -1 - 1/\alpha & 1 - 1/\alpha & -1/\alpha & -1/\alpha \\ -1/\alpha & 2/\alpha & 0 & 1/\alpha \\ 1/\alpha & 1/\alpha & 1/\alpha & 1/\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

IV. Considere a transformação linear $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $S(x, y, z) = (x, x - y + z, y - z)$.

a) Determine a matriz A que representa S em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Soluções:

Calculando a imagem dos vetores da base canónica de $\mathbb{R}^3$ tem-se

$$S(1,0,0) = (1,1,0), \quad S(0,1,0) = (0,-1,1) \text{ e } S(0,0,1) = (0,1-1),$$

e portanto a matriz A que representa S em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é a matriz que tem por colunas estes vetores:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Calcule os valores próprios de A.

Soluções: Os valores próprios de A são as soluções da equação

$$\det(A - \lambda I_3) = 0,$$

ou seja

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)((-1-\lambda)^2 - 1) = 0,$$

aplicando a regra de Laplace à primeira linha do determinante.

Tem-se

$$(1-\lambda)((-1-\lambda)^2-1) = (1-\lambda)(-1-\lambda-1)(-1-\lambda+1) = (1-\lambda)(-2-\lambda)(-\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+2),$$

logo os valores próprios são $\{-2, 0, 1\}$.

c) Determine os subespaços próprios de A.

Soluções:

Os subespaços próprios de A são os subespaços gerados pelos vetores próprios associados aos valores próprios $\{0, 1, -2\}$.

O espaço próprio associado ao valor próprio 0 é gerado pelas soluções de

$$(A - 0 \cdot I_3)X = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} X = 0,$$

onde X é o vetor coluna $(x, y, z)^\top$. Resolvendo o sistema obtemos $x = 0, y = z$, e portanto uma base pode ser o vetor $(0, 1, 1)$.

O espaço próprio associado ao valor próprio 1 é gerado pelas soluções de

$$(A - I_3)X = 0 \iff \begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-1 & 1 \\ 0 & 1 & -1-1 \end{bmatrix} X = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} X = 0.$$

Resolvendo o sistema obtemos $x - 2y + z = 0, y - 2z = 0$, ou ainda $x = 3z, y = 2z$ e portanto uma base pode ser o vetor $(3, 2, 1)$.

O espaço próprio associado ao valor próprio -2 é gerado pelas soluções de

$$(A + 2I_3)X = 0 \iff \begin{bmatrix} 1+2 & 0 & 0 \\ 1 & -1+2 & 1 \\ 0 & 1 & -1+2 \end{bmatrix} X = 0 \iff \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = 0.$$

Resolvendo o sistema obtemos $x = 0, y = -z$, e portanto uma base pode ser o vetor $(0, 1, -1)$.

d) Determine se é possível escrever A na forma $A = PDP^{-1}$, onde $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível e $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é uma matriz diagonal. Em caso afirmativo determine matrizes P e D nessas condições.

Soluções:

Uma vez que temos uma matriz 3×3 com 3 valores próprios distintos a matriz A é diagonalizável, ou seja $A = PDP^{-1}$ onde $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é a matriz cujas colunas são os vetores próprios obtidos anteriormente e $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é a matriz diagonal formada pelos valores próprios escritos na mesma ordem em P e em D. A matriz P é invertível pois vetores próprios associados a valores próprios distintos são linearmente independentes.

Assim, $A = PDP^{-1}$, onde

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

FIM