UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21157

Cálculo para Informática

23 de Janeiro de 2017

-- INSTRUÇÕES --

- O tempo de duração da prova de exame é de 2 horas, acrescida de 30 minutos de tolerância. O tempo de duração da prova de p-fólio é de 90 minutos.
- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Sempre que não utilize o enunciado da prova para resposta, poderá ficar na posse do mesmo.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas.
- Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- A prova é constituída por **2** páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.
- Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este exame tem a cotação total de 20 valores, distribuídos do seguinte modo: Grupo I: 4 valores, Grupo II: 9 valores, Grupo III: 7 valores.
- Não é permitida a utilização de quaisquer tabelas ou formulários.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular.

Grupo I (4 valores)

Prove que a sucessão x_n tal que $x_1 = 3$ e $x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 2}{x_n + 3}$ é convergente e calcule o seu limite.

Sugestão: Prove que a sucessão x_n é uma sucessão decrescente

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ então deverá ter-se $x = \dfrac{2x+2}{x+3}$ pois $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = x$ uma vez que x_{n+1} é uma subsucessão de x_n ou seja $x^2 + x - 2 = 0$ que tem como soluções $1, -2$

Vamos provar por indução que para todo o n $x_n > 1$

$x_1 = 3 > 1$ se $x_n > 1$ vamos provar que $x_{n+1} > 1$ ou seja que $\dfrac{2x_n + 2}{x_n + 3} > 1$ que é equivalente a $2x_n + 2 > x_n + 3$ ou seja $x_n > 1$

Vamos de seguida provar que a sucessão x_n é uma sucessão decrescente

$x_2 = \dfrac{8}{6} < 3 = x_1$ falta provar que se $x_{n+1} < x_n$ então $x_{n+2} < x_{n+1}$ ou seja queremos provar que $\dfrac{2x_{n+1} + 2}{x_{n+1} + 3} < x_{n+1}$ o que é equivalente a $2 < \left(x_{n+1}\right)^2 + x_{n+1}$ o que se verifica pois $x_{n+1} > 1$ logo a sucessão x_n é convergente e $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

Grupo II (9 valores)

1. Prove que a função $f\left(x\right) = x^7 + 4x^5 + 2x - 4$ tem somente uma raiz real.

$f\left(0\right) = -4 < 0$, $f\left(1\right) = 3 > 0$ logo pelo teorema de Bolzano $\exists c \in \left]0,1\right[$ tal que $f\left(c\right) = 0$ sendo este zero único pois se a função tivesse mais do que um zero pelo teorema de Rolle f' deveria anular-se, ora $f'(x) = 7x^6 + 20x^4 + 2 > 0$ nunca se anula e por conseguinte a função tem um único zero.

2. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)sen(x)}{\cos(x) - \cos^2(x)}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)sen(x)}{\cos(x) - \cos^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)sen(x)}{\cos(x)(1 - \cos(x))}$ como $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1$ tem-se que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)sen(x)}{\cos(x) - \cos^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)x}{(1 - \cos(x))}$ aplicando a regra de Cauchy tem-se $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)x}{(1 - \cos(x))} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x + e^x - 1}{sen(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x + e^x - 1}{x}$ de novo devido a que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x + e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} e^x + \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \lim_{x\to 0} e^x = 2$$

3. Prove que se $0 < a < b$ então $1 - \dfrac{a}{b} < \log\left(\dfrac{b}{a}\right) < \dfrac{b}{a} - 1$

$\log\left(\dfrac{b}{a}\right) = \log(b) - \log(a)$ e $\log'(x) = \dfrac{1}{x}$ pelo teorema de Lagrange tem-se que $\log(b) - \log(a) = \dfrac{b-a}{c}$ em que $a < c < b$ logo $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{b}$ e por conseguinte $1 - \dfrac{a}{b} = \dfrac{b-a}{b} < \dfrac{b-a}{c} < \dfrac{b-a}{a} = \dfrac{b}{a} - 1$ donde o resultado.

Grupo III (7 valores)

Calcule

a) $\int \frac{\log^2(x)}{x} dx \ \ (x > 0)$

É uma primitiva do tipo $\int f(\varphi(x))\dot{\varphi}(x)dx$ com $f(z) = z^2$ e $\varphi(x) = \log(x)$ logo como $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + k$ em que $F(z) = \int f(z)dz$ e $\int z^2 dz = \frac{z^3}{3} + k$

tem-se que $\int \frac{\log^2(x)}{x} dx = \frac{\log^3(x)}{3} + k$

b) $\int \frac{\cos(x)}{sen^2(x) - 4sen(x) + 8} dx$

É uma primitiva do tipo $\int f(\varphi(x))\dot{\varphi}(x)dx$ com $f(u) = \frac{1}{u^2 - 4u + 8}$. e $\varphi(x) = sen(x)$

Os zeros de $u^2 - 4u + 8$ são $2 \pm 2i$, então tem-se $u^2 - 4u + 8 = (u-2)^2 + 4$

Logo

$$\int \frac{1}{u^2-4u+8} = \int \frac{1}{(u-2)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{u-2}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{u-2}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{u-2}{2}\right)$$

logo a primitiva pretendida é $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{senx-2}{2}\right)+k$

FIM