e-Fólio B

Nome: ....

B. I.: .... **Nº de Estudante:** ....

Curso: .... **Turma:** ....

Unidade Curricular: Matemática Finita **Código:** 21082

Data: .... **Ano Lectivo:** 2013/14

Docente: Maria João Oliveira **Classificação:** ....

O e-Fólio é uma prova TOTALMENTE individual. A suspeita fundamentada de cópia, ou de plágio, é motivo de anulação imediata do mesmo.

Para a resolução do e-Fólio B, aconselha-se que:

- Imprima este documento (não necessariamente a cores) e preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 6 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra FIM. Responda às questões de escolha múltipla no espaço destinado a esse efeito. As suas respostas às restantes questões não devem ultrapassar 6 páginas.
- Escreva sempre com uma letra legível.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um documento único em **formato PDF**, que inclua esta folha de rosto, a folha das escolhas múltiplas e as suas restantes respostas, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em "e-Fólio B" até ao dia 19 de Maio.

Critérios de avaliação e cotação:

- Com excepção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A cotação total deste e-Fólio é de **4** valores.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 0.3 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado 0.1 valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões é de 0 valores. A distribuição da cotação é a seguinte:

1–3	ERRADAS				
C		0	1	2	3
E	0	0.0	0.0	0.0	0.0
R	1	0.3	0.2	0.1	
T	2	0.6	0.5		
AS	3	**0.9**			

4.	**5.**	**6.**
1.8 val.	**0.4** val.	**0.9** val.

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Considere as duas afirmações seguintes:

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Relativamente a estas afirmações podemos afirmar:

- ☐ **a)** Ambas são verdadeiras
- ☐ **b)** A afirmação (i) é verdadeira, mas a (ii) é falsa
- ☐ **c)** A afirmação (ii) é verdadeira, mas a (i) é falsa
- ☐ **d)** Ambas são falsas

2. Relativamente à dedução

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

pode afirmar-se:

- ☐ **a)** A dedução está correcta
- ☐ **b)** A primeira igualdade não está certa
- ☐ **c)** A segunda igualdade não está certa
- ☐ **d)** A terceira igualdade não está certa

3. Se $a_k = (-3)^k \binom{n}{k}$, então Δa_k **não** é igual a:

- ☐ **a)** $-(-3)^k \left(\binom{n+1}{k+1} + 2\binom{n}{k+1}\right)$
- ☐ **b)** $-(-3)^k \left(3\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}\right)$
- ☐ **c)** $(-3)^k \left(2\binom{n}{k} - 3\binom{n+1}{k+1}\right)$
- ☐ **d)** $-(-3)^k \left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}\right)$

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

4.

4.1. Dados dois números naturais $m < n$, mostre que

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 0$$

por recurso...

4.1.1. ... à fórmula de soma por partes.

4.1.2. ... por recurso a outro método, que não o método de indução matemática.

4.2. Por recurso à alínea anterior, prove que:

4.2.1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} (-1)^k = 0, \quad n > 1.$

4.2.2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^k = (-1)^n, \quad n \geq 0.$

5. Por recurso ao **método de indução matemática** mostre que

$$\sum_{k=0}^{n} k^n \binom{n}{k} (-1)^k = (-1)^n n!, \quad n \geq 1.$$

6. Sem recorrer ao método de indução matemática, prove as igualdades seguintes:

6.1.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{i+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{i}{k-1}.$$

6.2.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = H_n.$$

FIM