Cálculo para Informática (21157)
3ª Actividade Formativa

1 Calcule $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{e^x}{1+\left(e^x\right)^2}dx$ é uma primitiva do tipo $\int f(g(x))\dot{g}(x)dx$ em que $g(x)=e^x,\ f(z)=\frac{1}{1+z^2}$
ora $\int f(g(x))\dot{g}(x)dx = F(g(x))+C$ em que $\int f(z)dz = F(z)+C$ e como neste caso $F(z)=arctg(z)$ tem-se como primitiva $arctg\left(e^x\right)+C$.

2 Calcule $\int sen(\log(x))dx \quad (x>0)$

Sugestão: Faça uma primitivação por partes

Neste problema vamos usar a integração por partes fazendo $u'(x)=1, v(x)=sen(\log(x))$ tem-se $\int sen(\log(x))dx = xsen(\log(x)) - \int \cos(\log(x))dx$.
Para calcular $\int \cos(\log(x))dx$ vamos usar de novo a integração por partes tomando $u'(x)=1, v(x)=\cos(\log(x))$ tem-se $\int \cos(\log(x))dx = x\cos(\log(x)) + \int sen(\log(x))dx$ efectuando os cálculos tem-se $\int sen(\log(x))dx = \frac{x}{2}\left(sen(\log(x)) - \cos(\log(x))\right)+k$

3 Calcule $\int \frac{1}{x\left(1+x^6\right)}dx \quad (x>0)$

Sugestão : Multiplique o numerador e o denominador por uma função conveniente

$\int \frac{1}{x\left(1+x^6\right)}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x^5}{x^6\left(1+x^6\right)}dx$ é uma primitiva do tipo $\int f(g(x))\dot{g}(x)dx$ em que $g(x)=x^6,\ f(z)=\frac{1}{z(1+z)}$ como $\frac{1}{z(1+z)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{1+z}$ tem-se que $\int f(z)dz = \log(z)-\log(1+z)+C$ logo a primitiva pretendida é $\frac{1}{6}\left(\log\left(x^6\right)-\log\left(1+x^6\right)\right)+C$

4 Calcule $\int x^3\exp\left(x^2\right)dx$

Sugestão: Faça uma primitivação por partes.

$\int x^3 \exp(x^2) dx = \frac{1}{2}\int x^2 2x \exp(x^2) dx$ fazendo $g'(x) = 2x\exp(x^2)$ e $f(x) = x^2$ e atendendo a que $\int 2x\exp(x^2) dx = \exp(x^2)$ é uma primitiva do tipo $\int f_1(g_1(x))\dot{g}_1(x)dx$ em que $g_1(x) = x^2, f_1(z) = e^z$ ora $\int f_1(g_1(x))\dot{g}_1(x)dx = P(g_1(x)) + C$ em que $\int f_1(z)dz = P(z) + C$ e como neste caso $P(z) = \exp(z)$ tem-se como primitiva $\exp(x^2) + C$, logo $\frac{1}{2}\int x^2 2x\exp(x^2)dx = \frac{1}{2}\left(x^2\exp(x^2) - \int 2x\exp(x^2)dx\right)$ ou seja $\int x^3\exp(x^2)dx = \frac{1}{2}\left(x^2\exp(x^2) - \exp(x^2)\right) + K$

5 Calcule $\int \exp(\sqrt{x})dx \quad (x > 0)$

$$\int \exp(\sqrt{x})dx = 2\int \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\exp(\sqrt{x})dx = 2\left(\sqrt{x}\exp(\sqrt{x}) - \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\exp(\sqrt{x})\right) = 2\exp(\sqrt{x})(\sqrt{x} - 1) + k$$

6 Calcule $\int \frac{sen(x)}{\cos^2(x) + \cos(x) - 2}dx$

$\int \frac{sen(x)}{\cos^2(x) + \cos(x) - 2}dx = -\int \frac{-sen(x)}{\cos^2(x) + \cos(x) - 2}dx$ é uma primitiva do tipo $\int f(g(x))\dot{g}(x)dx$ em que $g(x) = \cos(x), f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 2}$ e como $z^2 + z - 2 = (z-1)(z+2)$ deverá ter-se $\frac{1}{z^2 + z - 2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2}$ logo $Az + 2A + Bz - B = 1$ tendo-se $\frac{1}{z^2 + z - 2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right)$ e por conseguinte $\int \frac{sen(x)}{\cos^2(x) + \cos(x) - 2}dx = -\frac{1}{3}\left(\log(\cos(x) - 1) - \log(\cos(x) + 2)\right) + k$

7 Calcule $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2 + k^2}$

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2 + k^2} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2\left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ ora (Ver ex 12 do texto Integração e Primitivação) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$ aplicando este resultado com a=0, b=1 e $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ tem-se que o limite pretendido é arctg(1).

8 Seja $f : R \to R$ uma função contínua calcule f(4) sabendo que $\forall x \in R$ se tem $sen(x\pi)x = \int_0^{x^2} f(t)dt$

Derivando ambos os membros da igualdade dada tem-se (ver ex14 do texto Integração e Primitivação)

$\pi x \cos(\pi x) + sen(\pi x) = f(x^2)2x$ fazendo x=2 obtemos $f(4) = \frac{\pi}{2}$.