21002 - Álgebra Linear I

Ano lectivo 2015/16

Docente: António Araújo

e-fólio A (20 a 30 de novembro)

Para a resolução do e-fólio, aconselha-se que:

- Verifique se o ficheiro que recebeu está correcto. O e-fólio consiste de 6 grupos de questões e termina com a palavra FIM.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um único documento digital (em formato pdf), incluindo obrigatoriamente esta folha de rosto e a página com as questões de escolha múltipla, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em "e-Fólio A" até ao dia limite referido no topo desta página.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Assegure-se de que o seu trabalho está legível.
- Recorde que o e-fólio é um trabalho individual.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este e-fólio tem a cotação total de 4 valores. Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores. Os Grupos II a VI têm cotação de 0.6 valores cada.

Por favor preencha os seus dados:

- Nome:
- B.I:
- N^o de Estudante'
- Curso:

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

I. Questões de escolha múltipla.

1. No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ considere os seguintes subconjuntos

$$\begin{aligned} &\text{(i) } A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} \\ &\text{(ii) } B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\} \\ &\text{(iii) } C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\} \end{aligned}$$

Então:

- ☐ a) A, B, e C são todos subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ b) Apenas A é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ c) Apenas A e B são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ d) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

2. Sejam $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ duas matrizes tais que $\det(AB) = -1$. Então:

- ☐ a) $\det A = -\det B$.
- ☐ b) $\det(A) = -1$ ou $\det(B) = -1$.
- ☐ c) A é invertível.
- ☐ d) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e diga qual das seguintes afirmações é verdadeira.

- ☐ a) $AB - BA = 0$.
- ☐ b) $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
- ☐ c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- ☐ d) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

e sejam B e C matrizes $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $AB = C$. Então

☐ a) C é invertível.
☐ b) $\det C = 1$.
☐ c) $\det C = 0$.
☐ d) A é invertível.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Considere o sistema de equações lineares,

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 4 \\ 3x - 7y + 2z - 5s + 4t = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4s + 7t = 22 \end{cases}$$

Utilizando o método de eliminação de Gauss e indicando clara e pormenorizadamente todas as operações que efetuar, discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

III. Utilizando o *Teorema de Laplace* calcule o valor de

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

IV. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} kx + y + z = & 1 \\ x + ky + z = & 1 \\ x + y + kz = & 1 \end{cases}$$

Calcule o determinante da matriz simples do sistema. Diga, justificando, para que valores de k é que o sistema é determinado, indeterminado, e impossível.

V. Diga, justificando, se os seguintes conjuntos são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$:

i) $\{(x, y, z, w) : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$
ii) $\{(x, y, z, w) : x^2 - y^2 = 0\}$
iii) $\{(x, y, z, w) : x + y + z + w = 1\}$
iv) $\{(x, y, z, w) : x + y + z + w = 0\}$

VI. Seja $A \in M_{n\times n}$ uma matriz invertível tal que $A^{-1} = A^T$. Mostre que $\det(A^2) = 1$.

FIM