Correcção Sumária

1.

1.1. Os números ímpares são os números cujo algarismo das unidades é igual a 1, 3, 5, 7, ou a 9. Há assim 5 possibilidades para o algarismo das unidades. Escolhido um deles, há 10 possibilidades para o algarismo das centenas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) e também 10 possibilidades para o algarismo das dezenas. Ou seja, existem $10 \times 10 = 100$ possibilidades para se fixarem os algarismos das dezenas e das centenas.

Atendendo a que existem 5 hipóteses para o algarismos das unidades, conclui-se assim que existem $5 \times 100 = 500$ maneiras para se obter um número ímpar.

1.2. Os números divisíveis por 5 são todos aqueles cujo algarismo das unidades é igual a 0 ou a 5. Ou seja, o algarismo das unidades pode ser escolhido de duas maneiras. Fixado o 0 ou o 5, existem $10 \times 10 = 100$ maneiras diferentes para se escolher os algarismos das centenas e das dezenas. Ou seja, existem $2 \times 100 = 200$ maneiras para se obter um número de três dígitos divisível por 5.

1.3. Realizando a decomposição em números primos tem-se

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5.$$

Como $2^3 \times 3 \times 5 = 8 \times 3 \times 5$, os três dígitos poderão ser o 3, o 5 e o 8. Como cada um deles pode ser o algarismo das centenas, das dezenas, ou das unidades, existem assim 3! diferentes números entre 000 e 999 constituídos a partir dos algarismos 3, 5 e 8. (Este valor resulta do facto de qualquer um destes três algarismos poder ocupar a casa das centenas. Escolhido um, qualquer um dos dois algarismos subjantes pode ocupar a casa das dezenas, ficando a escolha do algarismos das unidades reduzida a apenas uma possibilibidade.)

Mas, $2^3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times (2 \times 3) \times 5 = 4 \times 6 \times 5$. Ou seja, os dígitos 4, 5 e 6 também conduzem a um número de três dígitos cujo produto é igual a 120. Como qualquer um deles pode ocupar o lugar das centenas, das dezenas ou das unidades, existem 3! números diferentes formados a partir destes três dígitos.

Conclusão, existem $3! + 3! = 12$ maneiras para se obter um número cujo produto dos seus três dígitos é igual a 120.

1.4. Comece-se por observar que se um número tem apenas um dígito de valor superior a 7, então existem duas possibilidades para esse dígito: o valor 8, ou o valor 9.

Suponhamos que esse valor é o 9. Este valor pode então ser o algarismos das centenas, das dezenas, ou das unidades. Ou seja, o 9 pode estar localizado em qualquer uma das 3 posições. Escolhida uma, os restantes dois dígitos podem ser ambos escolhidos entre os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Ou seja, existe um total de $3 \times 8 \times 8 = 192$ números de três dígitos em que apenas um dígito é igual a 9 e os restantes iguais ou inferiores a 7.

Consideremos agora o caso de o valor ser o 8. Neste caso, este dígito pode ocupar qualquer uma das casas das centenas, das dezenas, ou das unidades, mas, escolhida uma, os restantes dois dígitos podem ambos tomar os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Existem, assim, 192 possibilidades.

Logo, existem $192 + 192 = 384$ números diferentes de três dígitos em que apenas um dos dígitos é maior que 7.

Sendo o número total de possibilidades igual a 1000 (número total de números de três dígitos entre 000 e 999), conclui-se que a probabilidade pedida é igual a $\frac{384}{1000} = 0.384$.

2. Seja A_n o acontecimento que ocorre se na n-ésima extracção, $n = 1, \ldots, 50$, ocorrer um reencontro. Pretende-se calcular $P(A_1 \cup \ldots \cup A_{50})$. Para tal utilize-se o Teorema de Poincaré:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_{50}) = \sum_{k=1}^{50} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le 50} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Observe-se que na expressão anterior, $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ significa a probabilidade de ocorrerem k reencontros (nas $i_1, i_2, \ldots, i_k$-ésimas extracções). Por definição de reencontro, isto significa que em cada uma destas k extracções conhece-se o valor inscrito na bola retirada. Não havendo reposição das bolas retiradas, nas restantes $50 - k$ extracções existem $(50 - k)!$ maneiras para se retirarem as restantes $50 - k$ bolas. Como existem 50! possibilidades diferentes para se retirarem, sem reposição, as 50 bolas da urna, tem-se assim

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(50 - k)!}{50!}$$

pelo que

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup \ldots \cup A_{50}) &= \sum_{k=1}^{50} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le 50} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{50} (-1)^{k-1} \frac{(50 - k)!}{50!} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le 50} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{50} (-1)^{k-1} \frac{(50 - k)!}{50!} \binom{50}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{50} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}.
\end{aligned}$$

3. Considerem-se os acontecimentos seguintes:

A - "Responde ao acaso"; B - "Acerta na resposta"

3.1. Pretende-se determinar a probabilidade condicionada $P(A \,|\, B)$. Pelo Teorema de Bayes tem-se

$$P(A \,|\, B) = \frac{P(B \,|\, A) P(A)}{P(B)} = \frac{P(B \,|\, A) P(A)}{P(B \,|\, A) P(A) + P(B \,|\, A^c) P(A^c)}, \qquad (1)$$

onde $P(B \mid A) = \frac{1}{3}$, $P(B \mid A^c) = 1$. Como o contexto é o estudante que estudou pouco, tem-se ainda que $P(A) = 0.7$.[1] Logo,

$$P(A \mid B) = 0.4375.$$

3.2. Esta questão resolve-se também por aplicação de (1), em que, no contexto do estudante que estudou, $P(A) = 0.05$. Obtém-se então $P(A \mid B) = 0.0172$.

4.

4.1. Para o preenchimento da primeira linha note-se que sendo f_0 o primeiro valor das frequências relativas tem-se $F_0 = f_0$. Logo, $f_0 = 0.2$. Por definição de frequência relativa acumulada, resulta daqui que $F_1 = F_0 + f_1 = 0.2 + 0.25 = 0.45$. Por outro lado, $0.75 = F_2 = F_1 + f_2 = 0.45 + f_2$, pelo que $f_2 = 0.75 - 0.45 = 0.3$.

Para o preenchimento da quarta linha, observe-se que a soma de todas as frequências relativas é igual a 1. Assim,

$$1 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = F_2 + f_3 + f_4 = 0.75 + f_3 + 0.1$$

e, por conseguinte, $f_3 = 0.15$. Daqui resulta que $F_3 = F_2 + f_3 = 0.75 + 0.15 = 0.9$ e $F_4 = 1$, como seria de esperar.

Obtém-se assim o quadro completo:

Quadro I

Nº de backups	f_i	F_i
0	0.2	**0.2**
1	**0.25**	0.45
2	0.3	**0.75**
3	0.15	0.9
4	**0.1**	1

4.2. Para resolver este grupo de questões comece-se por observar que sendo n_i (frequência absoluta) o número de estudantes que efectuam mensalmente i backups dos seus computadores, uma aplicação da regra de três simples permite concluir que este valor corresponde à percentagem

$$\frac{n_i}{N} \times 100\%, \quad (N = 200).$$

Ou seja, igual a $f_i \times 100\%$. Deste modo, não é necessário determinar o valor de n_i para se saber a pertentagem de estudantes que realizam i backups por mês.

Do mesmo modo, para se determinar a moda não é necessário conhecerem-se todas as frequências absolutas n_i. Com efeito, pela definição de frequência relativa resulta que ao maior valor de n_i corresponde o maior valor de f_i.

4.2.1. Pelas considerações anteriores tem-se então que a percentagem de estudantes inquiridos que mensalmente realizam 2 ou 3 backups é igual a

$$(f_2 + f_3) \times 100\% = 45\%.$$

[1] Independentemente do estudante em questão, só quando não se sabe é que se tenta responder ao acaso!

4.2.2. Ainda pelas considerações anteriores, a maior frequência relativa corresponde ao valor $0.30 = f_2$, pelo que a moda é igual a 2 backups mensais.

Relativamente à média, tem-se que esta é igual a

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{4} i\, n_i = \sum_{i=0}^{4} i\, \frac{n_i}{N} = \sum_{i=0}^{4} i\, f_i,$$

ou seja, igual a

$$\sum_{i=0}^{4} i\, f_i = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.25 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.15 + 4 \times 0.1 = 1.7.$$