UNIVERSIDADE ABERTA www.univ-ab.pt

e-Fólio A

cartão de aprendizagem

Correcção Sumária

Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**
b)	**b)**	**c)**

4. Nas condições do enunciado, provemos que $g : \mathbb{Q} \to Y$ é uma aplicação sobrejectiva.

Com efeito, dado um $y \in Y$, **qualquer**, resulta da hipótese de $g \circ f$ ser sobrejectiva que

$$\exists\, x \in X : \underbrace{(g \circ f)(x)}_{=g(f(x))} = y.$$

Assim, designando por $n = f(x) \in \mathbb{Q}$ tem-se que $g(n) = y$. Deste mesmo fica provado que $g : \mathbb{Q} \to Y$ é uma aplicação sobrejectiva.

A enumerabilidade de Y resulta agora do facto de $\mathbb{Q}$ ser um conjunto enumerável e do Exemplo 4, pág. 80, do Manual.

5. Sejam A_1, A_2, A_3 os conjuntos dos estudantes que estão inscritos, respectivamente, em Matemática Finita, em Álgebra Linear I e em Investigação Operacional. De acordo com os dados do problema, sabemos que

$$\#A_i = 80, i = 1, 2, 3, \quad \#(A_i \cap A_j) = 30, i \neq j, \quad \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 15.$$

5.1. Relativamente ao universo escolhido de 200 estudantes das Licenciaturas em Informática e em Matemática e Aplicações, nesta alínea pretende-se determinar

$$\#((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c) = 200 - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3),$$

Pelo princípio de inclusão/exclusão tem-se que

$$\begin{aligned} \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_2 \cap A_3) \\ &\quad - \#(A_1 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 240 - 90 + 15 = 165. \end{aligned}$$

e, assim,

$$\#((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c) = 200 - 165 = 35.$$

Ou seja, 35 estudantes não estão inscritos em nenhuma das três unidades curriculares.

5.2. Nesta questão pretende-se determinar

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) - \#(A_2 \cup A_3),$$

o que corresponde a retirar ao conjunto dos estudantes inscritos em pelo menos uma das três unidades curriculares os estudantes que estão inscritos em Álgebra Linear I ou em Investigação Operacional. Novamente pelo princípio de inclusão/exclusão tem-se

$$\#(A_2 \cup A_3) = \#A_2 + \#A_3 - \#(A_2 \cap A_3) = 160 - 30 = 130$$

e, assim,

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) - \#(A_2 \cup A_3) = 165 - 130 = 35.$$

6. Case Base: $\mathbf{n = 1}$. Neste caso tem-se

$$a^1 - b^1 = a - b$$

que, por hipótese, é um múltiplo de c. Ou seja e de um modo equivalente, c é um divisor de $a^1 - b^1 = a - b$. Fica assim provado o caso base.

Hipótese de indução: Dado $n \geq 1$, **qualquer**, suponhamos que c é um divisor de $a^n - b^n$. Isto é, $a^n - b^n = cm$ para algum $m \in \mathbb{N}$.

Tese de indução: c é um divisor de $a^{n+1} - b^{n+1}$.

Para se provar a tese de indução, note-se que

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a^n a - b^n b) = (a^n - b^n)a + b^n a - b^{n+1} = (a^n - b^n)a + b^n(a - b).$$

Assim, atendendo a que, por hipótese, $a - b = ck$ para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, e, atendendo a que, pela hipótese de indução, $a^n - b^n = cm$, resulta que

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a^n - b^n)a + b^n(a - b) = cma + ckb^n = c(\underbrace{ma + kb^n}_{\in \mathbb{N}}),$$

o que prova que c é um divisor de $a^{n+1} - b^{n+1}$. Fica assim provada a tese de indução.

Pelo método de indução matemática, podemos assim concluir que, para qualquer número natural $n \geq 1$, c é um divisor de $a^n - b^n$.

7. Dado um conjunto de n homens e n mulheres, existem

$$\binom{n}{k}\binom{n}{k}$$

maneiras diferentes de se formarem subconjuntos com $0 \leq k \leq n$ homens e k mulheres: de entre os n homens podemos escolher k homens de $\binom{n}{k}$ maneiras diferentes e, fixado um tal grupo de k homens, existem $\binom{n}{k}$ maneiras diferentes para se escolherem k mulheres entre as n iniciais.

Para cada um destes subconjuntos com k homens e k mulheres, podemos agora escolher um líder para os homens e um líder para as mulheres de k^2 maneiras diferentes: qualquer um dos k homens pode ser escolhido para liderar os homens, assim como qualquer uma das k mulheres pode ser escolhida para líder das mulheres.

Há assim um total de $k^2\binom{n}{k}^2$ subconjuntos com k homens e k mulheres com um líder para os homens e com um líder para as mulheres. Como $0 \leq k \leq n$, temos assim

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}^2$$

subconjuntos nas condições pedidas.

8. Suponhamos que $n = 1$. Neste caso tem-se

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = \binom{1}{1} = 1 = 2 \times 2^{-1} = n(n+1)2^{n-2},$$

o que prova que a igualdade é verdadeira.

Suponhamos agora que $n \geq 2$. Pela fórmula da extracção tem-se

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} = n \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k},$$

onde, por uma segunda aplicação da fórmula da extracção,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-1}{k} = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} = (n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k}.$$

Deste modo obtém-se

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} + n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$$

que, pelo Binómio de Newton,

$$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n-1)2^{n-2} + 2n2^{n-2} = n((n-1)+2)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}.$$