I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respetivo.

1. No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ considere os seguintes subconjuntos:

1. $A = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon xy + zw = 0\}$,
2. $B = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon 2x + 3y = 4z + 5w\}$,
3. $C = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon w = z\}$,
4. $D = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon \sqrt{2}\,x = \sqrt{3}\,y\}$.

Então:

- [ ] **a)** Os conjuntos A, C e D são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$.
- [ ] **b)** Nenhum dos conjuntos A, B, C e D é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.
- [ ] **c)** Só os conjuntos A e B são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$.
- [x] **d)** Só o conjunto A não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

2. Considere as matrizes A, B e C definidas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então

- [ ] **a)** $AA^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- [ ] **c)** $CB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
- [x] **b)** $BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
- [ ] **d)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ considere o sistema de equações que tem por matriz aumentada a seguinte matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2\lambda \end{array}\right).$$

Então

- [ ] **a)** $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ o sistema tem solução única.
- [ ] **b)** $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ o sistema não tem solução.
- [ ] **c)** $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ o sistema é indeterminado.
- [x] **d)** Se $\lambda = \sqrt{2}$ o sistema tem uma única solução.

4. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis.
Então

- [ ] **a)** $A + B$ é invertível.
- [ ] **c)** $A - B$ é invertível.
- [x] **b)** AB é invertível.
- [ ] **d)** $A + A^2$ é invertível.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II.

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

i) Determine o determinante da matriz A.(*Sugestão: Reduza A a uma matriz triangular conveniente.*)

ii) Utilizando a alínea anterior determine a 4ª componente da solução da equação $AX = B$ onde $B = (1, 2, 3, 4, 5, 6)^\top$.

III. Sejam A, B e $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $B = M^{-1}AM$.

i) Mostre que $\det B = \det A$.

ii) Supondo agora que B é invertível.

  a) Mostre que A é invertível.

  b) Calcule $\det A^{-1}B$.

IV. Seja $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & \alpha & 2 & 2 \end{array}\right)$ a matriz aumentada de um sistema de equações lineares.

Discuta o sistema em função dos valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Determine em particular os valores dos parâmetros para os quais

i) O sistema tem solução única.

ii) O sistema não tem solução.

V. Diga, justificando, se os seguintes conjuntos são subespaços vetoriais de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

i) O conjunto das matrizes triangulares superiores 2×2.

ii) O conjunto das matrizes que comutam com a matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

iii) O conjunto das matrizes invertíveis 2×2.

iv) O conjunto das matrizes não invertíveis 2×2.

v) O conjunto das matrizes nilpotentes 2×2.

vi) O conjunto das matrizes $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)$ tais que $y + z = 0$.

FIM

I. Questões de escolha múltipla.

1. Facilmente se verifica que B, C e D são subespaços de $\mathbb{R}^4$.

O único conjunto que não é um subespaço é o conjunto A pois não é fechado para a soma.

Vejamos um contra exemplo: sejam $u_1 = (1,0,0,4), u_2 = (0,2,3,0)$. Então u_1 e u_2 pertencem a A, mas $u_1 + u_2 = (1,2,3,4)$ já não pertence a A.

2. Facilmente se verifica que $AA^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $CB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Facilmente se verifica que a matriz aumentada dada tem as mesmas soluções que a matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 2\lambda - 1 \end{array}\right)$, e portanto a opção correta era **d)**.

4. Usando o facto de uma matriz ser invertível se e só se o seu determinante for diferente de zero, a opção correta era **b)**, tendo-se $\det AB = \det A \det B \neq 0$ pois A e B são matrizes invertíveis, e portanto $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$.

Contra exemplos simples:

- Para a) basta tomar $A = I_n, B = -I_n$ e portanto $A + B = 0_n$.
- Para c) basta tomar $A = B = I_n$ e portanto $A - B = 0_n$.
- Para d) basta tomar $A = -I_n$ e portanto $A + A^2 = 0_n$.

II. Fazendo operações sucessivas sobre linhas que não alteram o valor do determinante, obtemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_4 - 3/4\ell_3 \\ \ell_5 - 4/5\ell_4 \\ \ell_6 - 5/6\ell_5}]{\substack{\ell_2 - 1/2\ell_1 \\ \ell_3 - 2/3\ell_2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7/6 \end{pmatrix},$$

e portanto $\det A = \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{5}} \cdot \frac{7}{\cancel{6}} = 7$

Usando a regra de Cramer a 4ª componente da solução da equação $AX = B$ onde

$B = (1,2,3,4,5,6)^\top$ é dada por

$$x_4 = \frac{\det A_{(4)}}{\det A} = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7/5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \cancel{-}\frac{1}{\cancel{7}} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{5}}{2} \cdot \frac{\cancel{-7}}{\cancel{5}} \cdot 1 = \frac{4}{2}$$
$$= 2,$$

onde efetuámos uma troca entre as 2 últimas linhas da matriz com o correspondente sinal $-$.

Nota: Um erro bastante frequente consiste em tentar resolver a equação $AX = B$ substituindo a matriz A pela matriz triangular obtida na 1ª alínea. Tal procedimento só faz sentido se se efetuar na matriz coluna B as mesmas operações que foram efetuadas anteriormente na matriz A.

III. Tem-se

$$\det B = \det(M^{-1}AM) = \det(M^{-1}) \cdot \det A \cdot \det M = (\det M)^{-1} \cdot \det A \cdot \det M = \det A.$$

Se B é invertível então $\det B \neq 0$ e como $\det A = \det B$, também se tem $\det A \neq 0$, logo A é invertível, e portanto $\det A^{-1}B = \det(A^{-1}) \cdot \det B = (\det A)^{-1} \cdot \det A = 1$.

Nota: Um erro bastante frequente consiste em tentar utilizar A^{-1} *antes* de ter provado que a matriz A é invertível.

IV. Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & \alpha & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_3 - \ell_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta \\ 0 & \alpha & 2-\beta & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_3 - \ell_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1-\beta & 1-\beta \end{array}\right).$$

O determinante da matriz é $\alpha^2(1-\beta)$ e portanto se $\alpha^2(1-\beta) \neq 0$ a matriz é invertível e a solução é única, resumindo se $\alpha \neq 0$ **e** $\beta \neq 1$ o sistema tem solução e é única.

Se $1 - \beta = 0$, ou seja $\beta = 1$, tem-se $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, e portanto seja qual for o valor de α o sistema é indeterminado, mais precisamente com grau de indeterminação 2 se $\alpha = 0$, e grau de indeterminação 1 se $\alpha \neq 0$.

O único caso que falta é $1 - \beta \neq 0$ e $\alpha = 0$.

Neste caso o sistema é impossível pois obtemos a matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, ou de modo equivalente $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-\beta \end{array}\right)$, e como $\beta \neq 1$, a característica da matriz aumentada é superior à característica da matriz do sistema.

Resumindo:

$\beta = 1, \alpha \in \mathbb{R}$	$\beta \neq 1, \alpha = 0$	$\beta \neq 1, \alpha \neq 0$
Sistema Indeterminado	Sistema Impossível	Solução Única

V. **Nota**: Recordo que se a resposta é "sim" é necessário provar as 4 propriedades que um subespaço deve verificar, e que se a resposta é "não" então devem arranjar um contra exemplo, quanto mais simples melhor, para uma das 4 propriedades.

Recordo também que com as definições do manual adoptado (página 4 da 3ª edição), a matriz nula é triangular, triangular superior, triangular inferior e também é uma matriz diagonal.

Em qualquer das 6 alíneas, o conjunto dado era trivialmente um subconjunto do espaço vectorial considerado.

i) Sim; a matriz nula é triangular superior, o produto de um escalar por uma matriz triangular superior ainda é uma matriz triangular superior, e a soma de 2 matrizes triangulares superiores é uma matriz triangular superior.

ii) Sim; pois a matriz nula comuta com qualquer matriz, e se C for a matriz do enunciado, e A e B são matrizes que comutam com a matriz C, então também λA comuta com a matriz C; também se tem $(A+B)C = AC+BC = CA+CB = C(A+B)$, e portanto a soma de 2 matrizes que comutam com a matriz C é uma matriz que ainda comuta com a matriz C.

iii) Não; pois a matriz nula não é invertível.

iv) Não; pois a soma de 2 matrizes não invertíveis pode ser invertível, não basta afirmá-lo é necessário arranjar um contra exemplo.
Por exemplo $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Mais simplesmente podemos dizer que multiplicando uma matriz invertível por $\lambda = 0$ obtemos a matriz nula que não é invertível.

v) Não; pois a soma de 2 matrizes nilpotentes pode não ser nilpotente, não basta afirmá-lo é necessário arranjar um contra exemplo.
Por exemplo $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A^2 = 0, B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B^2 = 0, (A+B)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = I_2$, e portanto $A+B$ não pode ser nilpotente.

vi) Sim; pois a matriz nula satisfaz trivialmente a condição $y+z=0$, o produto de um escalar λ por uma matriz que satisfaz a condição $y+z=0$ ainda satisfaz a mesma condição pois $\lambda y + \lambda z = \lambda(y+z) = \lambda \times 0 = 0$. Analogamente dadas 2 matrizes A e A' que satisfaçam a condição $y+z=0$ e $y'+z'=0$, então $(y+y')+(z+z') = (y+z)+(y'+z') = 0+0 = 0$, e portanto a matriz $A+A'$ ainda satisfaz a mesma condição.

FIM