UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

p-Fólio

U.C. 21082
Matemática Finita

8 de junho de 2016

- INSTRUÇÕES -

- O p-fólio é composto por 7 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 4, 5, 6 e 7 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui--se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- **O p-fólio tem a duração máxima de 1 hora e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com excepção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

Grupo 4	**Grupo 5**	**Grupo 6**	**Grupo 7**
1.50	1.50	1.50	4.50

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **CC/BI nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Num curso de 100 alunos, cada estudante lê, pelo menos, um livro de matemática ou de informática. Sabido que 67 estudantes leram livros de matemática e que 44 leram ambos os tipos de livros, quantos estudantes leram livros de informática?

- ☐ **a)** 23
- ☐ **b)** 77
- ☐ **c)** 33
- ☐ **d)** Nenhum dos valores anteriores

2. Sejam a um número inteiro negativo e b um número inteiro positivo. Relativamente ao $\text{mdc}(a, b)$ podemos afirmar:

- ☐ **a)** $\text{mdc}(a, b) > 0$
- ☐ **b)** $\text{mdc}(a, b) > 0$ se $b > |a|$
- ☐ **c)** $\text{mdc}(a, b) < 0$
- ☐ **d)** $\text{mdc}(a, b) < 0$ se $|a| > b$

3. Relativamente à sucessão $\langle u_n \rangle$, $u_n = 7^n - 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, considere as seguintes afirmações:

i. *Cada* $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{5} \in \mathbb{N}$

ii. $\langle u_n \rangle$ *coincide com a sucessão* $\langle v_n \rangle$ *definida por* $v_0 = 0$, $v_1 = 5$, $v_n = 9v_{n-1} - 14v_{n-2}, n \geq 2$

Tem-se que:

- ☐ **a)** Ambas as afirmações são falsas
- ☐ **b)** A afirmação *i* é verdadeira, mas a afirmação *ii* é falsa
- ☐ **c)** A afirmação *ii* é verdadeira, mas a afirmação *i* é falsa
- ☐ **d)** Ambas as afirmações são verdadeiras

Responda às questões seguintes na folha de ponto

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

4. Considerando apenas a posição relativa das pessoas, calcule, justificando, de quantas maneiras 7 indivíduos podem sentar-se numa mesa redonda, sabido que dois determinados indivíduos têm de sentar-se juntos.

5. Dados dois números $a, b \in \mathbb{N}$, suponha que existem dois números $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax + by = 1.$$

Prove que se $a \mid (bc)$ para um certo $c \in \mathbb{Z}$, então $a \mid c$.

6. Utilizando um critério de divisibilidade por 7 verifique que $\mathrm{mdc}(72684, 7) = 1$.

7. Sejam $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ duas sucessões definidas recursivamente pelo sistema

$$\begin{cases} a_n + 2a_{n-1} - 4b_{n-1} = 0 \\ b_n + 5a_{n-1} - 7b_{n-1} = 0 \end{cases} , \ n \geq 1$$

e pelas condições iniciais $a_0 = 4$, $b_0 = 3$.

7.1. Por recurso ao **método de indução matemática** mostre que

$$a_n - b_n = 3^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

7.2. Prove que

$$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

e determine o termo geral da sucessão $\langle a_n \rangle$.

7.3. Mostre que para cada $n \in \mathbb{N}$ os números a_n e b_n são primos entre si.

FORMULÁRIO

- **Lei de Pascal**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Revisão trinomial**

$$\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}$$

- **Fórmula da extracção**

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

- **Teorema binomial**

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

- **Adição paralela**

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

- **Adição do índice superior**

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- **Adição alternada do índice inferior**

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}(-1)^k = (-1)^n\binom{m-1}{n}$$

- **Convolução de Vandermonde**

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

FIM