Cálculo para Informática (21157)
1ª Actividade Formativa

1 Prove que se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ então $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = a$

O resultado é intuitivamente claro pois se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ tem-se que se $n \approx +\infty$ então $a_n \approx a$ ora se
Def?
$n \approx +\infty$ então $n+1 \approx +\infty$ logo $a_{n+1} \approx a$ e $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = a$

De modo mais formal(1) $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$ sse $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N$ tal que se $n \geq n_0$ então $|y_n - y| < \varepsilon$ fazendo $y_n = a_{n+1}$ e dado um $\varepsilon > 0$ queremos ver que $\exists n_0 \in N$ tal que se $n \geq n_0$ então $|y_n - a| < \varepsilon$ ora $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ logo $\exists n_0 \in N$ tal que se $n \geq n_0$ então $|a_n - a| < \varepsilon$ e como se $n \geq n_0$ então $n+1 \geq n_0$ tem-se que $|y_n - a| < \varepsilon$ donde o resultado.

2 Prove que se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k < 1$ então $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Sugestão: comece por provar que a_n é decrescente a partir de dada ordem e use o teorema da sucessão monótona

Sendo $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k < 1$ tem-se que(1) $\exists n_0 \left(n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \right)$ logo a partir de dada ordem a sucessão é decrescente, por outro lado é limitada inferiormente pois todos os seus termos são positivos logo como toda a sucessão decrescente e limitada inferiormente é convergente tem-se que a sucessão a_n (TSM) é convergente, sendo o seu limite zero pois se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$ então $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

3 Se $0 < a < 1$ calcule $\lim_{n\to+\infty} na^n$

Vamos usar o resultado anterior $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)a}{n} = a < 1$ pois

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

4 Prove que $n^k = o(a^n)$ quando $n \to +\infty$ em que $k \in N$ e $a > 1$
Def?

(1) 2º texto complementar p. 103 Definición 2
(TSM) teorema da sucessão monótona REF?

JUST: 1/n → 0; JUST: lim (a_n + b_n) = lim a_n + lim b_n

Queremos ver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$ vamos usar de novo o ex 2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^k a^n}{(n)^k a^{n+1}}=\dfrac{1}{a}<1$ pois

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^k}{(n)^k}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k=1$$

5 Prove que $a^n=o(b^n)$ quando $n\to+\infty$ se $b>a>0$

Queremos ver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{b^n}=0$ ora $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{b^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=0$ uma vez que $0<\dfrac{a}{b}<1$ (ver ex 2 manual pág 42) neste problema também se pode usar o ex 2

Nota: Pode utilizar estes resultados nas provas de avaliação. Quais resultados? => "resultados mais usados"

6 Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{10}+\dfrac{n}{5^{n+1}}+100}{2*4^n+n^3+n}$

Dado $a_n=o(b_n)$ quando $n\to+\infty$ tem-se que dado $c\neq 0$ então $a_n=o(c\,b_n)$ pois se $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$ então $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{c\,b_n}=\dfrac{1}{c}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{c\,b_n}=0$ e como quando $n\to+\infty$ $n^3=o(2*4^n)$ pois $n^3=o(4^n)$ AF1 Ex. 4 e $n=o(2*4^n)$ pois $n=o(4^n)$ AF1 Ex. 4 tem-se que quando $n\to+\infty$ $2*4^n+n^3+n\sim 2*4^n$ Def? por outro lado $\dfrac{n}{5^{n+1}}=o(n^{10})$ e $100=o(n^{10})$ pois

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{5^{n+1}n^{10}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{5^{n+1}n^9}=\dfrac{1}{+\infty}=0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{100}{n^{10}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$ logo tem-se que quando $n\to+\infty$ $n^{10}+\dfrac{n}{5^{n+1}}+100\sim n^{10}$ e por conseguinte

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{10}+\dfrac{n}{5^{n+1}}+100}{2*4^n+n^3+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{10}}{2*4^n}=0$ uma vez que $n^{10}=o(2*4^n)$

7 Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots\dfrac{1}{\sqrt{n+n}}$

Sugestão: Use a proposição sobre sucessões enquadradas

$\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n+n}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$ ora para $k=0,\cdots n$ $\quad \sqrt{n}\le\sqrt{n+k}\le\sqrt{n+n}$

logo $\frac{n+1}{\sqrt{2n}}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n+1}{\sqrt{n}}$ vamos analisar os limites $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{2n}}$

(ver proposição 5 pág 41 do manual) $\frac{n+1}{\sqrt{n}}\ge\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$ logo $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n}}\ge\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ por

outro lado $\frac{n+1}{\sqrt{2n}}\ge\frac{n}{\sqrt{2n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ logo $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{2n}}\ge\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}=+\infty$ ou seja pelo teorema das

JUST: lim sqrt(n) → ∞, n → ∞

sucessões enquadradas tem-se $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n+n}}=+\infty$

REF? Inclui caso de comparação com limites infinitos?

8 Prove que a função $f(x)=x^7+4x-4$ tem pelo menos uma raíz.

A função f é contínua por outro lado tem-se $f(0)=-4<0$ e $f(1)=1>0$ logo pelo teorema de Bolzano $\exists c\in\left]0,1\right[$ tal que $f(c)=0$

REF?

9 Seja $f:[0,1]\to R$ uma função contínua tal que $f(0)=1$ e $f(1)=0$. Prove que $\exists k\in\left]0,1\right[$ tal que $f(k)=k$.

Consideremos a função $g(x)=f(x)-x$ é uma função contínua e tem-se que $g(0)=1, g(1)=-1$ logo pelo teorema de Bolzano $\exists k\in\left]0,1\right[$ tal que $g(k)=0$ isto é $f(k)=k$

10 Calcule $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{4+x-4}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\frac{1}{4}$ JUST: lim (x → a) 1/x → 1/a
JUST: sqrt(x) é contínua

11 Calcule $\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

12 Calcule $\lim_{x\to0}\frac{sen(x)}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to0}\frac{sen(x)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}sen(x)}{x}=\lim_{x\to0}\sqrt{x}\frac{sen(x)}{x}=\sqrt{0}*1=0$$ REF for lim (x→0) sen(x)/x = 1 ?

13 Calcule $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}\quad(a\neq0)$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(x+a)}=\frac{0}{2a}=0$$