Nome:..

B.I. :...................................   **Nº de Estudante**: ....

Curso: ....

Turma: ....

Unidade Curricular: **Elementos de Probabilidade e Estatística**....................

Código: ..21037 ....   **Data**: ..9 de Julho de 2009.

Assinatura do Vigilante: ....

PARA A RESOLUÇÃO DO p-FÓLIO, TENHA EM ATENÇÃO O SEGUINTE:

- Verifique o exemplar que lhe foi entregue e, caso note alguma deficiência dirija-se ao professor vigilante. O p-fólio é constituído por **11** páginas e termina com a palavra **FIM**.

- O p-fólio tem a duração total de 1 horas e 30 minutos.

- A cotação global do p-fólio é de 12 valores, assim dividida por 5 grupos:

I.	1,5		
II.	a) 1,0	b) 1,0	
III.	a) 1,0	b) 1,5	
IV.	a) 1,0	b) 1,5	
V.	a) 1,0	b) 1,5	a) 1,0

- **Não** serão aceites respostas a lápis ou a caneta de outra cor que não seja a preta ou a azul. **É** permitida a utilização de máquina de calcular, régua e/ou esquadro.

- Em **Anexo** encontram-se **algumas fórmulas** para consulta.

- **Justifique** todas as afirmações e cálculos que realizar com a adequada simbologia matemática e respectivo desenvolvimento. Se precisar de um resultado de uma alínea anterior que não resolveu, para resolver outra alínea, as suposições que necessite fazer (caso façam sentido), serão levadas em linha de conta aquando da correcção.

I. Considere a precipitação (em mm) caída no Porto nos anos 1996 a 2006:

Anos	1996	1997	1998	1999	200	2001	2002	2003	2004	200	200
Precipitação	331,	162,	149,	101,	26,8	403,	157,	332,	126,	9,6	62,3

1,5 valores

Com base nos dados apresentados, calcule a média, a variância e o coeficiente de variação da precipitação no Porto nos anos em análise.

II. Uma peça é manufacturada por 3 fábricas: 1, 2 e 3. Sabe-se que a fábrica 1 produz o dobro de cada uma das fábricas 2 e 3. Além disso, 2% das peças produzidas pelas fábricas 1 e 2 são defeituosas, enquanto 4 % das produzidas pela fábrica 3 são defeituosas. Todas as peças produzidas são colocadas no mesmo armazém. Tira-se uma peça ao acaso, qual a probabilidade:

a) De ter sido produzida na fábrica 1?

1,0 valores

1,0 valores

b) Da peça ser defeituosa? (Caso não tenha resolvido a alínea a) considere que é equiprovável a probabilidade da peça ser produzida em qualquer uma das fábricas)

III. Considere uma experiência aleatória que consiste no lançamento de dois dados perfeitos. Definindo a variável aleatória X como a diferença em valor absoluto dos resultados obtidos. Determine:

a) A função de probabilidade.

1,0 valores

b) O valor médio e a variância. **1,5 valores**

IV. Uma empresa dispõe de uma caixa multibanco para utilização dos seus funcionários, depois de muitas observações concluiu-se que o número de utilizações da caixa multibanco segue um processo de Poisson. Em média, por hora, 6 pessoas utilizam os serviços da caixa multibanco. Calcule a probabilidade de:

a) Numa hora, escolhida aleatoriamente, a máquina ter sido utilizada pelo menos por 5 pessoas.

1,0 valor

b) Num intervalo de 10 minutos, escolhidos aleatoriamente, nenhuma pessoa ter utilizado a máquina.	**1,5 valores**

V. Os resultados num jogo de determinada modalidade são normalmente distribuídos com uma média de 30 segundos e um desvio padrão de 5 segundos, qual a probabilidade de obter resultados:

1,0 valores

a) Num determinado jogo, superiores a 30s? (faça o esboço gráfico)

1,5 valores

b) Num determinado jogo, entre os 28s e os 34s? (faça o esboço)

c) De no final da primeira volta, correspondente a dez jogos, a média dos resultados ser inferior a 29 s?

1,0 valores

ANEXO

Modelos	Expressão das funções de Probabilidade	μ	σ^2
Bernoulli	$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$ x=0,1	*p*	*p(1-p)*
Binomial	$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ x=0,1,..*n*	*np*	*np(1-p)*
Poisson	$P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ x=0,1,...	λ	λ
Uniforme	$P(X=x)=\frac{1}{n}$ x=0,1,...	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Geométrica	$P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$ x=1,...	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Hipergeométrica	$P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}.\frac{N-M}{N}.\frac{N-n}{N-1}$

	Expressão das funções de:		μ	σ^2
Modelos	**Densidade**	**Distribuição**		
Exponencial	$f(x)=\lambda\, exp(-\lambda x) \quad x>0$	$F(x)=1-exp(-\lambda x) \quad x>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Uniforme	$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad x\in[a,b]$	$F(x)=\frac{x-a}{b-a} \quad x\in[a,b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$		μ	σ^2

Valores da Função Distribuição Normal Reduzida

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = P(Z \le z)$$

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-2,0	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020	0,019	0,019	0,018
-1,9	0,029	0,028	0,027	0,027	0,026	0,026	0,025	0,024	0,024	0,023
-1,8	0,036	0,035	0,034	0,034	0,033	0,032	0,031	0,031	0,030	0,029
-1,7	0,045	0,044	0,043	0,042	0,041	0,040	0,039	0,038	0,038	0,037
-1,6	0,055	0,054	0,053	0,052	0,051	0,049	0,048	0,047	0,046	0,046
-1,5	0,067	0,066	0,064	0,063	0,062	0,061	0,059	0,058	0,057	0,056
-1,4	0,081	0,079	0,078	0,076	0,075	0,074	0,072	0,071	0,069	0,068
-1,3	0,097	0,095	0,093	0,092	0,090	0,089	0,087	0,085	0,084	0,082
-1,2	0,115	0,113	0,111	0,109	0,107	0,106	0,104	0,102	0,100	0,099
-1,1	0,136	0,134	0,131	0,129	0,127	0,125	0,123	0,121	0,119	0,117
-1,0	0,159	0,156	0,154	0,152	0,149	0,147	0,145	0,142	0,140	0,138
-0,9	0,184	0,181	0,179	0,176	0,174	0,171	0,169	0,166	0,164	0,161
-0,8	0,212	0,209	0,206	0,203	0,200	0,198	0,195	0,192	0,189	0,187
-0,7	0,242	0,239	0,236	0,233	0,230	0,227	0,224	0,221	0,218	0,215
-0,6	0,274	0,271	0,268	0,264	0,261	0,258	0,255	0,251	0,248	0,245
-0,5	0,309	0,305	0,302	0,298	0,295	0,291	0,288	0,284	0,281	0,278
-0,4	0,345	0,341	0,337	0,334	0,330	0,326	0,323	0,319	0,316	0,312
-0,3	0,382	0,378	0,374	0,371	0,367	0,363	0,359	0,356	0,352	0,348
-0,2	0,421	0,417	0,413	0,409	0,405	0,401	0,397	0,394	0,390	0,386
-0,1	0,460	0,456	0,452	0,448	0,444	0,440	0,436	0,433	0,429	0,425
-0,0	0,500	0,496	0,492	0,488	0,484	0,480	0,476	0,472	0,468	0,464
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536

0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982

FIM

Orientação de resolução

P-fólio 9/7/2009

I.

X – Precipitação (em mm)

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{331,4 + \ldots + 62,3}{11} = 169,39 \ mm$$

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n} = \frac{\left(331,4 - 169,39\right)^2 + \ldots. + \left(62,3 - 169,39\right)^2}{11} = 124,99 \ mm^2$$

$$C.V. = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{11,18}{169,39} = 0,066$$

II.

a) X_1 = Peça produzida na fábrica 1

X_2 = Peça produzida na fábrica 2

X_3 = Peça produzida na fábrica 3

$X_1 = 2\ X_2$

$X_1 = 2\ X_3$ $\qquad X_1 + X_2 + X_3 = 1$

$X_1 = 0,5$

$X_2 = 0,25$

$X_3 = 0,25$

P (produzida na fabrica 1) = 0,5

b)

$$P(defeituosa) = (D \mid F_1) \times P(F_1) + P(D \mid F_2) \times P(F_2) + P(D \mid F_3) \times P(F_3) =$$

$$= 0,02 \times \frac{1}{2} + 0,02 \times \frac{1}{4} + 0,04 \times \frac{1}{4} = 0,025$$

III.

a)

-	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2		0	1	2	3	4
3			0	1	2	3
4				0	1	2
5					0	1
6						0

$$P\ (X\ = 0)\ =\ P\ ('1' \cap\ '1') + P\ \left('2' \cap '2'\right) + ... + P\ \left('6' \cap '6'\right)$$

$$= \frac{1}{6}\ \times\ \frac{1}{6}\ +\ ....\ +\ \frac{1}{6}\ \times\ \frac{1}{6}\ \ =\ \frac{6}{36}$$

$$P\left(X\ = 1\right) = P\ ('6' \cap\ '5') + P\ \left('4' \cap '3'\right) + P\ \left('5' \cap '4'\right) + P\ \left('3' \cap '2'\right) + P\ \left('2' \cap '1'\right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36} \times 2 = \frac{10}{36}$$

$$P\left(X\ = 2\right) = P\ ('6' \cap\ '4') + P\ \left('5' \cap '3'\right) + P\ \left('4' \cap '2'\right) + P\ \left('3' \cap '1'\right) = 2 \times \frac{4}{36} = \frac{8}{36}$$

$$P\left(X\ = 3\right) = P\ ('6' \cap\ '3') + P\ \left('5' \cap '2'\right) + P\ \left('4' \cap '1'\right) = 2 \times \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$$

$$P\left(X\ = 4\right) = P\ ('6' \cap\ '2') + P\ \left('5' \cap '1'\right) = 2 \times \frac{2}{36} = \frac{4}{36}$$

$$P\left(X\ = 5\right) = P\ ('6' \cap\ '1') = 2 \times \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$$

X	0	1	2	3	4	5
f(X)	$6/36$	$10/36$	$8/36$	$6/36$	$4/36$	$2/36$

b)

$$E(X) = 0\times\frac{6}{36} + 1\times\frac{10}{36} + \ldots + 5\times\frac{2}{36} = 1,94$$

$$VAR(X) = \left(0-\frac{35}{18}\right)^2 \times\frac{6}{36} + \left(1-\frac{35}{18}\right)^2 \times\frac{10}{36} + \ldots + \left(5-\frac{35}{18}\right)^2 \times\frac{2}{36} = 1,42$$

IV.

a) Y – Nº de utilizadores por hora da caixa multibanco

$$Y \rightarrow P_0(\lambda = 6)$$

$$P(Y \geq 5) = 1 - P(Y \leq 4) = 1\text{-}0,285 = 0,715$$

b) Nº de utilizadores (em 10 minutos) da caixa multibanco

60 m —— 6

10 m —— λ

$$T \rightarrow \mathrm{P}_0(\lambda = 1)$$

$$P(T = 0) = \frac{1^0\ \mathrm{e}^{-1}}{0!} = 0,368$$

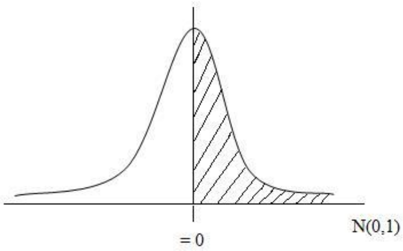
V.

a) Num determinado jogo, superiores a 30s? (faça o esboço gráfico)

Seja X – Resultado num jogo de determinada modalidade (segundos)

$$X \rightarrow N(\mu = 30\,; \sigma^2 = 5^2)$$

$$P(X > 30) = P\left(Z > \frac{30-30}{5}\right) = P(Z > 0) = 0,5$$

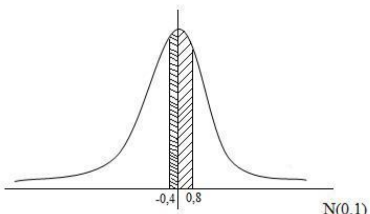


b)

$$P(28 \leq X \leq 34) = \mathrm{P}\left(\frac{28-30}{5} \leq Z \leq \frac{34-30}{5}\right) =$$

$$\mathrm{P}(-0,4 \leq Z \leq 0,8) = \mathrm{P}(Z \leq 0,8) - \mathrm{P}(Z \leq -0,4))$$

$$= 0,788 - 0,345 = 0,443$$



c)

Y – Resultado médio (em segundos) no final da primeira volta correspondente a 10 jogos.

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_{10}}{10}$$

$$E(Y) = \frac{30 + 30 + ... + 30}{10} = 30$$

$$VAR(Y) = \frac{VAR(X_1) + ... + VAR(X_{10})}{10^2} = \frac{25 + 25 + ... + 25}{10^2} = 2{,}5 = 1{,}58^2$$

$$Y \to \mathrm{N}\left(\mu = 30\ ;\ \sigma^2 = 1{,}58^2\right)$$

$$P\left(\mathrm{Y} < 29\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} < \frac{29 - 30}{1{,}58}\right) = \mathrm{P}\ (\ \mathrm{Z} < -0{,}63) = \ 0{,}264$$