U.C. 21037
Elementos de Probabilidades e Estatística

10 de julho de 2014

Critérios de avaliação:

- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efectuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizadas afirmações erradas (por exemplo, probabilidades ou frequências relativas de valor superior a 1).

Correcção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correcta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

1. (**Exame**: 5.0 valores)

1.1. (**Exame**: 1.50 valores)
Para o preenchimento da primeira linha note-se que $N_1 = n_1$ e, portanto, $n_1 = 39$. Os restantes valores em falta calculam-se pela definição de frequência absoluta acumulada,

$$N_i = n_i + N_{i-1}, \quad i = 2, 3, 4, 5,$$

e pela definição de frequência relativa acumulada

$$F_i = \frac{N_i}{N}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

onde $N = 237$ (dimensão da amostra). Daqui resulta que $N_5 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = N$ e que $F_5 = 1$.

O quadro completo é então o seguinte:

Nº de viagens	n_i	N_i	F_i
1	39	**39**	0.165
2	**80**	119	0.502
3	60	**179**	0.755
4	**29**	208	0.878
5	29	237	1

1.2. (**Exame**: 1.50 valores)

Moda: da segunda coluna da tabela da alínea anterior conclui-se que o maior valor da frequência absoluta n_i é 80, valor que, atendendo à primeira coluna da mesma tabela, é obtido com duas (2) viagens de avião. Consequentemente, 2 é o valor da moda.

Média: Tem-se

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{5} j n_j = \frac{1}{237} (1 \times 39 + 2 \times 80 + 3 \times 60 + 4 \times 29 + 5 \times 29) = 2.7.$$

Mediana: há 237 elementos na amostra (número ímpar). Ordenando os dados por ordem crescente do número de viagens realizadas (não é obviamente necessário fazê-lo explicitamente), o ponto médio na colecção de dados corresponde ao dado com a ordem 119 (obtido, directamente, a partir do cálculo $(237 + 1)/2$). Consultando a terceira e a primeira colunas da tabela da alínea anterior verifica-se que a este número de ordem corresponde duas (2) viagens de avião ($N_2 = 119$). Assim, a mediana é igual a 2.

1.3.1. (**Exame**: 1.0 valor)

Por definição de frequência relativa acumulada,

$$F_3 = \frac{N_3}{N} = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{N},$$

tem-se que a percentagem de clientes que realiza uma, duas, ou três viagens aéreas por mês é igual a $F_3 \times 100\% = 75.5\%$. Logo, a percentagem de clientes que viaja quatro ou mais vezes por mês é $100\% - 75.5\% = 24.5\%$.

1.3.2. (**Exame**: 1.0 valor)

Pelas considerações anteriores, tem-se que a percentagem de clientes que viaja de avião apenas duas vezes por mês é igual a

$$\frac{n_2}{N} \times 100\% = \frac{N_2 - n_1}{N} \times 100\% = (F_2 - F_1) \times 100\% = 33.7\%.$$

2. (**Exame**: 3.0 valores)

Este exercício é semelhante ao Exercício 5 da Actividade Formativa 2.

2.1. (**Exame**: 1.50 valores)

Considere-se a variável aleatória X que designa o número de vezes que sai uma bola amarela nas 20 tiragens. Tal como explicado no Exercício 5.1 da Actividade Formativa 2, esta variável aleatória segue uma distribuição binomial com $n = 20$ e

$$p = \frac{25}{105} = \frac{5}{21}.$$

Portanto, a probabilidade de em 20 tiragens ser retirada uma única vez uma bola amarela é igual a

$$P(X = 1) = \binom{20}{1} p^1 (1-p)^{20-1} = 20 \frac{5}{21} \left(\frac{16}{21}\right)^{19} = \frac{100}{21} \left(\frac{16}{21}\right)^{19}.$$

2.2. (**Exame**: 1.50 valores)

Sendo X_n a variável aleatória que designa o número de vezes que sai uma bola amarela em $n \geq 1$ tiragens, as razões indicadas na resolução do Exercício 5.2 da Actividade Formativa 2 permitem concluir que X_n segue uma distribuição binomial com n e $p = \frac{5}{21}$. Pretende-se determinar o menor valor de n tal que

$$P(X_n = 1) = \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} > 0.4,$$

ou, de modo equivalente,

$$n \left(\frac{16}{21}\right)^n > 0.4 \times \frac{21}{5} \times \frac{16}{21} = 1.28.$$

Resolvendo esta inequação por "tentativa e erro", têm-se

$$\begin{aligned}
(n = 1) \quad & \frac{16}{21} < 1 < 1.28, \\
(n = 2) \quad & 2 \left(\frac{16}{21}\right)^2 = 1.160998 < 1.28, \\
(n = 3) \quad & 3 \left(\frac{16}{21}\right)^3 = 1.326855 > 1.28,
\end{aligned}$$

pelo que serão necessárias três extracções para que a probabilidade de se retirar uma bola amarela seja superior a 0.4.

3. (**Exame**, **P-fólio**: 6.50 valores)

Para a resolução deste grupo de questões é essencial ter presente que, por definição de função de distribuição,

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.1. (**Exame**, **P-fólio**: 1.50 valores)
Assim,

- $P(X \leq 0.15) = F(0.15) = 0.1$;
- Como $\{0.15 < X \leq 2\} = \{x \leq 2\} \setminus \{X \leq 0.15\}$, tem-se

$$\begin{aligned} P(0.15 < X \leq 2) &= P(x \leq 2) - P(X \leq 0.15) \\ &= F(2) - F(0.15) = 0.45 - 0.1 = 0.35; \end{aligned}$$

- Por definição de esperança condicionada e pelos dois cálculos anteriores,

$$P(X > 0.15 \,|\, X \leq 2) = \frac{P(0.15 < X \leq 2)}{P(X \leq 2)} = \frac{0.35}{0.45} = 0.7(7).$$

3.2. (**Exame**, **P-fólio**: 1.0 valor)
Observe-se que $x \in A$, ou seja, $P(X > x) = 0.55$, se, e só se, $P(X \leq x) = 1 - 0.55 = 0.45$. Logo,

$$\begin{aligned} A = \{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) = 0.45\} &= \{x \in \mathbb{R} : F(x) = 0.45\} \\ &= F^{-1}(\{0.45\}) = [2, 3[\,. \end{aligned}$$

3.3. (**Exame**, **P-fólio**: 1.50 valores)
Os valores possíveis da variável aleatória X correspondem aos pontos de descontinuidade da função de distribuição F, ou seja, aos pontos 0, 1, 2, 3, 4. Logo,

$$f(0) := P(X = 0) = P(X \leq 0) = F(0) = 0.1.$$

Para os restantes valores valores tem-se

$$\begin{aligned} f(1) := P(X = 1) &= P(X \in \,]0, 1]) = P(X \leq 1) - P(X \leq 0) \\ &= F(1) - F(0) = 0.25 - 0.1 = 0.15 \end{aligned}$$

e, de modo semelhante,

$$\begin{aligned} f(2) &= F(2) - F(1) = 0.2, \\ f(3) &= F(3) - F(2) = 0.2, \\ f(4) &= F(4) - F(3) = 0.35. \end{aligned}$$

Deste modo, tem-se

x	0	1	2	3	4
$f(x) := P(X = x)$	0.1	0.15	0.2	0.2	0.35

3.4. (**Exame**, **P-fólio**: 2.50 valores)
Sendo $Z = X + 1$, $P(Z = n) = P(X = n - 1)$. Logo, a função de probabilidade de Z é igual a

x	1	2	3	4	5
$f_Z(x)$	0.1	0.15	0.2	0.2	0.35

Tal como no Exercício 2.4 da Actividade Formativa 2, podemos agora determinar a função de distribuição de Z:

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, \ x < 1 \\ 0.1, \ 1 \leq x < 2 \\ 0.25, \ 2 \leq x < 3 \\ 0.45, \ 3 \leq x < 4 \\ 0.65, \ 4 \leq x < 5 \\ 1, \ x \geq 5 \end{cases}$$

4. (**Exame**, **P-fólio**: 5.50 valores)

4.1. (**Exame**, **P-fólio**: 2.0 valores)
Sendo f_X uma função densidade de probabilidade,

$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 f_X(x)\, dx.$$

Assim, por definição da função f_X, tem-se

$$0.5 = \int_0^1 (1 + \alpha - x)\, dx = \left[(1+\alpha)x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 + \alpha - \frac{1}{2},$$

o que conduz a $\alpha = 0$.

4.2. (**Exame**, **P-fólio**: 2.0 valores)
Tem-se

$$\begin{aligned} E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) &= \int_{-1}^{0} (1+x)x\, dx + \int_0^1 (1-x)x\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) &= \int_{-1}^{0} (1+x)x^2\, dx + \int_0^1 (1-x)x^2\, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Conclusão, $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) = \frac{1}{6}$.

4.3. (**Exame**, **P-fólio**: 1.50 valores)
Tal como no Exercício 11.3 da Actividade Formativa 2, por primitivação da função f_X obtém-se

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \ x < -1 \\ \\ x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, \ -1 \leq x < 0 \\ \\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, \ 0 \leq x < 1 \\ \\ 1, \ x \geq 1 \end{cases}$$