

”

E-fólio B | Folha de resolução para E-fólio



UNIDADE CURRICULAR: Computação Numérica

CÓDIGO: 21180

DOCENTE: Costa O'Connor Shirley

A preencher pelo estudante

NOME: Ivo Vieira Baptista

N.º DE ESTUDANTE: 2100927

CURSO: Licenciatura em Engenharia Informática

DATA DE ENTREGA: 8 de Janeiro de 2024

TRABALHO / RESOLUÇÃO:

1. Introdução: Cálculo do número de condição e no método de eliminação de Gauss com escolha parcial de pivot para resolver sistemas de equações lineares. Este estudo também enfatiza a importância da escolha de pivot na eliminação de Gauss e do número de condição como indicadores críticos da estabilidade e precisão das soluções numéricas. As técnicas numéricas aqui exploradas são fundamentais para entender e resolver eficientemente sistemas de equações lineares, que são problemas recorrentes em várias áreas da ciência e engenharia. Compreender estas técnicas permite prever e controlar erros, otimizar soluções e entender a estabilidade de algoritmos numéricos.

2. Metodologia: O desenvolvimento do projeto baseou-se na implementação de dois métodos numéricos principais: cálculo do número de condição usando normas específicas e método de eliminação de Gauss com escolha parcial de pivot. Foram escolhidos parâmetros e estruturas de código que otimizam a performance e a legibilidade, utilizando operações vetoriais e matriciais sempre que possível para garantir eficiência. Além disso, a metodologia considera estratégias para minimizar o acúmulo de erros de arredondamento e garantir a estabilidade numérica, como a escolha adequada de pivot na eliminação de Gauss.

3. Desenvolvimento e Implementação:

3.1 - Função $\text{condm}(A, p)$: Esta função calcula o número de condição da matriz A usando a norma p . O cálculo envolve a determinação da matriz inversa de A e o produto das normas de A e sua inversa. Caso p não seja 1 ou infinito, a função retorna uma matriz vazia como indicativo de input inválido.

3.1.1 - Sobre o Número de Condição:

O número de condição de uma matriz nos sistemas de equações lineares é um indicador vital da sensibilidade do sistema a pequenas perturbações nos dados de entrada. Conforme indicado (pag. 141, Capítulo 3 do livro *Análise Numérica*, Maria Raquel Valença, Universidade Aberta, 1996), sistemas com um número de condição elevado são considerados mal condicionados e suscetíveis a grandes erros nas soluções, mesmo frente a pequenas alterações nos coeficientes ou termos independentes. Este fenômeno destaca a importância do número de condição na avaliação da estabilidade e precisão das soluções numéricas. Em termos práticos, um alto número de condição sugere que o sistema pode ser instável e que as soluções obtidas podem ser imprecisas devido à amplificação de erros inerentes aos cálculos computacionais. Portanto, é crucial considerar o número de condição ao escolher métodos numéricos e algoritmos para resolver sistemas lineares, especialmente em aplicações onde a precisão é crítica. Estratégias como a melhoria da condição do sistema ou a escolha de métodos numéricos apropriados podem ser empregadas para mitigar os efeitos de um sistema mal condicionado e garantir resultados mais confiáveis.

3.1.2 - Alteração na Seleção de p para Cálculo do Número de Condição:

Na revisão do script efb23.m, utilizei diretamente a matriz A para determinar o valor de p no cálculo do número de condição. A seleção de p é baseada na soma dos elementos de A : se a soma total for maior ou igual a zero, p será infinito; caso contrário, p será 1. Esta abordagem direta reflete mais precisamente as propriedades intrínsecas de A e visa melhorar a representação do número de condição, alinhando a seleção de p com a natureza da matriz e a estabilidade do sistema.

Trecho de código-chave:

```
% Determinamos o valor de p baseado na soma do elementos de A
if sum(A(:)) >= 0
    p = inf;
else
    p = 1;
end
```

A escolha de p é então determinada pela soma total desses sinais. Se predominarem valores positivos ou neutros (incluindo zero), selecionamos $p=\infty$, enquanto uma predominância de valores negativos leva à escolha de $p=1$. Essa metodologia foi escolhida para alinhar-se com a natureza intrínseca da matriz A e oferecer uma avaliação mais precisa do número de condição em relação à sua estabilidade.

3.1.3 - Importância da Mudança: Ao adotar uma abordagem mais deliberada e variada na escolha de p , buscamos aprimorar a precisão e a relevância do cálculo do número de condição. Esse refinamento é particularmente significativo quando consideramos a sensibilidade do sistema a pequenas perturbações nos dados. Com essa alteração, esperamos obter uma representação mais fiel da estabilidade e precisão das soluções numéricas. O mesmo valor de p é utilizado em todas as iterações, proporcionando uma base consistente para a comparação e interpretação dos resultados.

Esta alteração no script é uma demonstração da nossa dedicação em adaptar e otimizar métodos numéricos para refletir com precisão as características únicas dos sistemas que estão sendo analisados. Os resultados obtidos com essa metodologia reforçam a necessidade de escolher parâmetros numéricos cuidadosamente, assegurando robustez e adequação às particularidades de cada problema resolvido

3.2- Função elim_gausspt(A, b, tol): A função implementa o método de eliminação de Gauss com escolha parcial de pivot. A tolerância tol é usada para identificar e manejar matrizes próximas a singulares. A função realiza operações de linha eficientes para transformar a matriz A em uma forma triangular superior, seguindo com a substituição inversa para encontrar a solução do sistema. A implementação foi cuidadosamente realizada para mitigar os efeitos da instabilidade numérica.

3.2.1 - Principais Componentes do Código:

Escolha Parcial de Pivot:

```
[maxval, maxidx] = max(abs(Ab(k:n, k)));  
maxidx = maxidx + k - 1;
```

O algoritmo seleciona o maior valor absoluto na coluna atual como pivot, minimizando o erro numérico e aumentando a estabilidade do método.

3.2.2 - Verificação de Singularidade:

```
if abs(maxval) < tol  
fprintf('Matriz A fica singular!\n');  
return;  
end
```

Antes de prosseguir com a eliminação, o algoritmo verifica se o pivot é menor que a tolerância especificada, terminando prematuramente se a matriz for considerada singular.

3.2.3 - Eliminação de Gauss e Troca de Linhas: O algoritmo realiza a eliminação de Gauss para zerar os elementos abaixo do pivot na coluna **k**, trocando linhas quando necessário para posicionar o pivot na diagonal principal.

3.2.4 - Substituição Inversa

```
x = zeros(n, 1);  
for i = n:-1:1  
x(i) = (Ab(i, n+1) - Ab(i, i+1:n)*x(i+1:n)) / Ab(i, i);  
end
```

Após a eliminação, o algoritmo resolve o sistema triangular superior resultante, calculando cada componente de **x** de baixo para cima.

4. Considerações Importantes:

- A implementação foi cuidadosamente realizada com base nas diretrizes da (pag. 141, Capítulo 3 do livro *Análise Numérica*, Maria Raquel Valença, Universidade Aberta, 1996) que destaca a importância de técnicas eficientes de escolha de pivot para garantir a estabilidade numérica.
- O código tira partido das operações matriciais e vetoriais para eficiência e clareza, seguindo as melhores práticas de programação numérica.

Este método é uma parte crucial do nosso estudo sobre a resolução de sistemas lineares e demonstra a importância de considerar a estabilidade numérica e a precisão ao lidar com problemas computacionais complexos

4.1- Script efb23.m: Este script realiza um estudo iterativo, alterando progressivamente a matriz **A** para se aproximar de uma condição singular e analisando o impacto no número de condição e na solução do sistema. O script gera gráficos que ilustram a relação entre o número de condição e a norma do erro da solução. Serve para analisar a relação entre o número de condição de uma matriz e a norma do erro na solução de sistemas lineares. O script realiza uma série de cálculos e gera gráficos para ilustrar essa relação. Abaixo, destaco e explico algumas partes cruciais do código:

4.2- Inicialização e Configuração: O script começa com a limpeza do ambiente do Octave e a definição de parâmetros iniciais, incluindo a matriz **A** 15x15 com elementos aleatórios entre [-1, 1], o vetor **b** 15x1 também com elementos aleatórios, e uma tolerância especificada para os cálculos numéricos.

Ciclo de Iterações:

```
for i = 1:50
    A(1,:) = (1 - k_values(i)) * A(1,:) + k_values(i) * A(2,:);
    cond_numbers(i) = condm(A, p);
    x = elim_gausspt(A, b, tol);
    ...
end
```

O script executa um ciclo de 50 iterações, variando progressivamente a primeira linha da matriz **A** para aproximar a matriz de uma condição singular. Em cada iteração, calcula-se o número de condição da matriz **A** e resolve-se o sistema linear **Ax=b** usando a função **elim_gausspt**.

A norma do erro da solução é então calculada e armazenada.

```
erro_vec = A*x - b;
errors(i) = sqrt(sum(erro_vec.^2));
```

O resultado **erro_vec** é um vetor que contém a diferença entre o lado esquerdo e o lado direito do sistema linear para cada equação, ou seja, os resíduos para cada equação. A norma euclidiana (ou norma 2) de um vetor é definida como a raiz quadrada da soma dos quadrados de seus componentes.

5. Visualização dos Resultados:

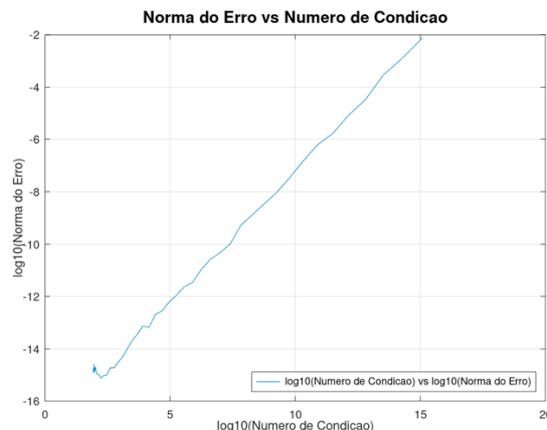
O script gera três gráficos diferentes para visualizar a relação entre o logaritmo do número de condição e o logaritmo da norma do erro. Estes gráficos ajudam a ilustrar como a condição da matriz **A** afeta a precisão da solução do sistema linear.

6. Gráficos:

Os gráficos gerados pelo script proporcionam uma análise visual da relação entre o número de condição e a norma do erro em sistemas lineares ao longo de 50 iterações, destacando a importância da estabilidade numérica e precisão das soluções.

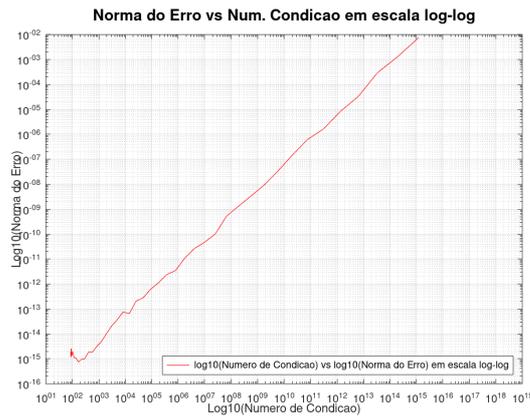
6.1 - Gráfico 1: Mostra a relação direta entre a norma do erro e o número de condição em uma escala logarítmica.

Norma do Erro vs. Número de Condição (Log10): Este gráfico demonstra que sistemas com números de condição elevados tendem a apresentar uma maior norma do erro, refletindo uma maior sensibilidade a perturbações e uma precisão menor na solução. A representação em escala logarítmica permite uma visualização clara da relação entre estes dois fatores, mesmo quando variam por várias ordens de magnitude.



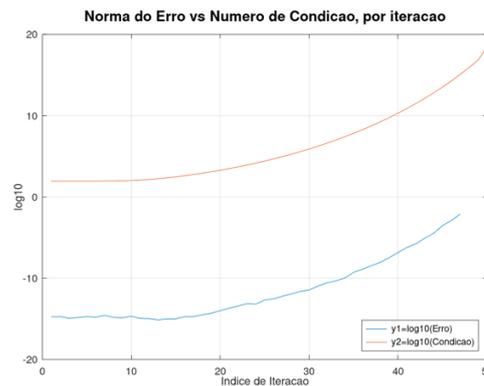
6.2 - Gráfico 2: Enfatiza a relação entre a norma do erro e o número de condição em uma escala log-log.

Relação em Escala Log-Log: Ao apresentar ambos os eixos em escala logarítmica, este gráfico reforça a relação proporcional entre o número de condição e a norma do erro, tornando mais evidentes as tendências exponenciais e destacando como variações no número de condição podem drasticamente afetar a precisão da solução.



6.3 - Gráfico 3: Apresenta como a norma do erro e o número de condição evoluem com cada iteração.

Evolução por Iteração (Log10): O último gráfico oferece uma perspectiva dinâmica, mostrando como o erro e o número de condição evoluem ao longo das iterações. Este gráfico é particularmente útil para observar a estabilidade do sistema em estudo ao longo do tempo, identificando momentos de maior ou menor precisão e estabilidade.



Juntos, esses gráficos enfatizam a correlação direta entre o número de condição e a norma do erro, sublinhando a necessidade de considerar cuidadosamente as propriedades numéricas das matrizes ao resolver sistemas lineares para garantir resultados precisos e confiáveis.

Importância do Script:

Este script é uma ferramenta valiosa para entender a influência do número de condição na estabilidade e precisão das soluções numéricas de sistemas lineares. Ao visualizar como pequenas alterações na matriz **A** podem levar a grandes variações na solução, podemos apreciar a importância de considerar o número de condição ao resolver sistemas lineares, especialmente em contextos onde a precisão é crucial.

7. Resultados: Os gráficos gerados pelo script efb23.m mostram uma clara correlação entre o aumento do número de condição e o aumento da norma do erro, indicando uma diminuição da precisão da solução. Os resultados ilustram

vividamente como um número de condição elevado pode ser indicativo de uma solução menos precisa, reforçando a necessidade de considerar cuidadosamente as propriedades numéricas das matrizes em análise.

8. Discussão: Os resultados confirmam a importância do número de condição como indicador da qualidade da solução de um sistema linear. Foi observado que um número de condição elevado está frequentemente associado a uma maior norma do erro, evidenciando a instabilidade do sistema. A discussão sobre os resultados também se aprofunda na relação entre a escolha de pivot na eliminação de Gauss e o número de condição da matriz. É discutido como esses fatores influenciam diretamente a estabilidade e precisão das soluções obtidas, sugerindo que uma atenção cuidadosa a esses aspectos pode levar a melhorias significativas na confiabilidade dos métodos numéricos.

9. Conclusão: O projeto demonstrou efetivamente a relação entre o número de condição e a estabilidade de soluções numéricas para sistemas lineares, validando a importância dos métodos de eliminação de Gauss e do cálculo do número de condição em aplicações práticas. Estes métodos são ferramentas valiosas na resolução de problemas complexos em várias disciplinas científicas e de engenharia.

10. Referências:

- As técnicas e considerações discutidas neste relatório são baseadas em informações extraídas do (Capítulo 3 do livro *Análise Numérica*, Maria Raquel Valença, Universidade Aberta, 1996), que oferece uma exploração detalhada do método de eliminação de Gauss, escolha de pivot, e o impacto do número de condição em sistemas lineares.

WebGrafia:

<https://github.com/StudentUAb/EfolioA-CN>

<https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~calves/MC/cap2.html>

<https://www.youtube.com/watch?v=FFk6Vnp0PYg>

<https://www.youtube.com/watch?v=1pYSxyz7n9U>

<https://www.youtube.com/watch?v=EcM3tbLhosU>

<https://ocw.mit.edu/courses/18-335j-introduction-to-numerical-methods-spring-2019/pages/week-8/>

<https://mathworld.wolfram.com/ConditionNumber.html>

<https://mathematica.stackexchange.com/questions/267935/condition-number-of-a-matrix>

<https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~calves/cursos/NormCond.htm>

<https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MS211/Aula03.pdf>

<https://pt.symbolab.com>

<https://www.octave.org>

<https://chat.openai.com> (para debug do Octave e consultas)

Meus Vídeos:

<https://github.com/StudentUAb/Basicos-Octave>

<https://github.com/StudentUAb/Basicos-Octave>

Bibliografia:

Análise Numérica, Maria Raquel Valença, Universidade Aberta,