E-fólio B | Folha de resolução para E-fólio

Investigação Operacional | 21076

Nome: Luís Carlos Crispim Pereira

N^{0} de Estudante: 2300163

Curso: LEI **Turma:** 03

Data: 16 de Maio de 2025 **Ano Lectivo:** 2024/2025

Docentes: Patrícia Engrácia, Elsa Negas e José Agapito

1.a)
Trata-se de um sistema $M/M/1/6$ $(População\ =\ \infty)$
Tanto o processo de chegada de passageiros como o do tempo de atendimento correspondem a processos Poissonianos.
O número de servidores é $S\ =\ 1$ (há apenas um funcionário, o Sr. Manuel, a atender os clientes) e o número máximo de clientes no sistema é $K\ =\ 6$ (incluindo o cliente em atendimento e os que estão na fila de espera.).

$$Fila\ máxima\ =\ K - S = 6\ -\ 1\ =\ 5$$

Processo de chegadas Poissoniano com uma taxa de chegadas:
$$\lambda\ =\ \frac{1}{12} clientes/minuto = 5\ clientes/hora$$

Duração do serviço com distribuição Exponencial Negativa com taxa de atendimento:
$$\mu\ =\ \frac{1}{10} clientes/minuto = 6\ clientes/hora$$

Disciplina da fila: FIFO (first in, first out).

1.b)

Dados:
$$\lambda\ =\ \frac{1}{12} clientes/minuto$$
$$K\ =\ 6$$
$$\mu\ =\ \frac{1}{10} clientes/minuto$$

Cálculos:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{10}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = \frac{1-\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^7} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{5^7}{6^7}} = \frac{1}{6}\,\frac{6^7}{6^7-5^7} = \frac{6^6}{6^7-5^7}$$

$$P_6 = \rho^K P_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \frac{6^6}{6^7-5^7} = \frac{5^6 6^6}{6^6(6^7-5^7)} = \frac{5^6}{6^7-5^7}$$

$$\lambda - \bar{\lambda} = \lambda - \lambda(1-P_6) = \lambda - \lambda + \lambda P_6 = \lambda P_6 = \frac{1}{12}\,\frac{5^6}{6^7-5^7} \sim 0{,}00645\ clientes/minuto$$

Assim por hora acabam por não ser atendidos:
$0{,}00645 * \ 60 \sim 0{,}387\ clientes/hora$

Por hora, quantos passageiros acabam por não ser atendidos?
R: Aproximadamente 0,387 passageiros/hora.

1.c)
Dados:

$\rho = \frac{5}{6}$

$\lambda = \frac{1}{12} clientes/minuto$

$K = 6$

$P_6 = \frac{5^6}{6^7 - 5^7}$

Cálculos:

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_6) = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{5^6}{6^7 - 5^7}\right)$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} - \frac{7\left(\frac{5}{6}\right)^7}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^7} = 5 - \frac{7.5^7}{6^7 - 5^7}$$

Tempo médio que cada passageiro passa no quiosque:

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{5 - \frac{7.5^7}{6^7 - 5^7}}{\frac{1}{12}\left(1 - \frac{5^6}{6^7 - 5^7}\right)} \sim 29{,}8\ minutos$$

Qual o tempo médio que cada passageiro passa no quiosque?
R: Aproximadamente 29,8 minutos.

1.d)
Dados:

$\mu = \frac{1}{10} clientes/minuto$

$W \sim 29{,}8$

Tempo médio que cada passageiro passa à espera na fila:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 29{,}8 - \frac{1}{\frac{1}{10}} \sim 19{,}8\ minutos$$

Qual o tempo médio que cada passageiro passa à espera na fila?
R: Aproximadamente 19,8 minutos.

1.e)
Dados:
Sistema $M/M/2/6$ $(População = \infty)$
$K = 6$
$S = 2$
$Fila\ máxima = K - S = 6 - 2 = 4$

$$\lambda = \frac{1}{12} clientes/minuto = 5\ clientes/hora$$

$$\mu = \frac{1}{10} clientes/minuto$$

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{\frac{1}{12}}{2\left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{12} < 1$$

Cálculos:

$$P_0 = \left[\frac{S^S \rho^{S+1}(1-\rho)^{K-S}}{S!\,(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{S} \frac{(S\rho)^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{2^2 \frac{5}{12}^{2+1}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{K-2}}{2!\left(1-\frac{5}{12}\right)} + \sum_{n=0}^{2} \frac{\left(2\frac{5}{12}\right)^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{4\frac{5^3}{12^3}\left(\frac{7}{12}\right)^4}{2\left(\frac{7}{12}\right)} + \frac{\left(2\frac{5}{12}\right)^0}{0!} + \frac{\left(2\frac{5}{12}\right)^1}{1!} + \frac{\left(2\frac{5}{12}\right)^2}{2!}\right]^{-1} = \left[\frac{\frac{4.5^3.7^4}{12^7}}{\frac{14}{12}} + 1 + \frac{5}{6} + \frac{25}{72}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{24\,.\,5^3\,.\,7^3}{12^7} + 1 + \frac{5}{6} + \frac{25}{72} \sim 0{,}453\right]$$

$$P_6 = \frac{(S\,.\,\rho)^6}{S!\,.\,S^{6-S}} P_0 = \frac{\left(2\,.\frac{5}{12}\right)^6}{2!\,.\,2^4}\,.0{,}453 \sim 0{,}00474$$

$$\lambda - \bar{\lambda} = \lambda - \lambda(1-P_6) = \lambda - \lambda + \lambda P_6 = \lambda P_6 = \frac{1}{12}\,0{,}00474 \sim 0{,}000395\,clientes/minuto$$

Assim por hora acabam por não ser atendidos:
$0{,}000395 * 60 \sim 0{,}0237\,clientes/hora$

$$\bar{\lambda} = \lambda(1-P_6) = \frac{1}{12}(1-0{,}00474) \sim 0{,}0829\,clientes/minuto$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} = \frac{\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}} - \frac{(6+1)\frac{5}{12}^{6+1}}{1-\frac{5}{12}^{6+1}} = \frac{5}{7} - \frac{7\frac{5^7}{12^7}}{1-\frac{5^7}{12^7}} \sim 0{,}699$$

Tempo médio que cada passageiro passa no quiosque:

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{0{,}699}{0{,}0829} = 8{,}43\,minutos$$

Tempo médio que cada passageiro passa à espera na fila:

$$W_q = W - \frac{1}{S\,.\mu} = 8{,}43 - \frac{1}{2\,.\,\frac{1}{10}} = 8{,}43 - 5 = 3{,}43\,minutos$$

Com 2 pessoas a atender os passageiros
Identifique e caracterize o tipo de sistema de fila de espera associado ao problema enunciado.
R: Sistema $M/M/2/6$ ($População = \infty$)

Por hora, quantos passageiros acabam por não ser atendidos?
R: Aproximadamente 0,0237 passageiros/hora.

Qual o tempo médio que cada passageiro passa no quiosque?
R: Aproximadamente 8,43 minutos.

Qual o tempo médio que cada passageiro passa à espera na fila?
R: Aproximadamente 3,43 minutos.

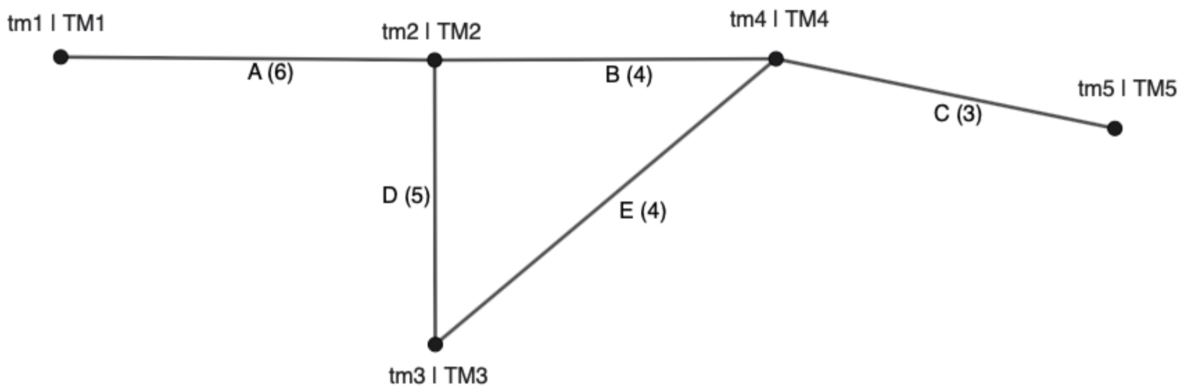
1.f)
Com base na análise realizada, o administrador da estação deve contratar um segundo funcionário pois a comparação entre os dois cenários mostra melhorias claras e objetivas no desempenho do sistema.

- Com apenas 1 funcionário, o quiosque apresenta um tempo médio total de permanência de 29,8 minutos por passageiro, com 19,8 minutos de espera na fila, e uma taxa de 0,387 passageiros não atendidos por hora. Estes valores indicam um serviço lento e sobrecarregado.

- Com 2 funcionários, o tempo médio total reduz-se para 8,43 minutos, o tempo de espera para 3,43 minutos, e o número de passageiros rejeitados cai drasticamente para apenas 0,0237 por hora. Ou seja, o sistema torna-se mais eficiente e praticamente elimina a recusa de atendimento.

Dado o impacto substancial na qualidade do serviço, a contratação de um segundo funcionário é altamente recomendada, traduzindo-se numa experiência significativamente melhor para os passageiros e numa redução evidente da pressão sobre o atendimento.

2.a)



Cálculos tempos mais cedo (tm):
$tm1 = 0\ (nó\ inicial)$
$tm2 = tm1 + 6 = 6$
$tm3 = tm2 + 5 = 11$
$tm4 = \max\{tm3 + 4, tm2 + 4\} = \max\{15,10\} = 15$
$tm5 = tm4 + 3 = 18$

Cálculos tempos mais tarde (Tm):
$TM1 = TM2 - 6 = 0$
$TM2 = \min\{TM3 - 5, TM4 - 4\} = \min\{6,11\} = 6$
$TM3 = \mathrm{TM4} - 4 = 11$
$TM4 = TM5 - 3 = 15$
$TM5 = 18\ (nó\ final)$

2.b)
As atividades que unem os nós com tempo mais cedo e tempo mais tarde iguais são candidatas a atividades críticas neste caso todos os nós. Para serem atividades críticas, a diferença entre os tempos mais cedo (ou mais tarde) entre o nó final e o nó inicial tem de ser igual à duração da atividade (para não haver folgas).

Atividade	$Tm(i+1) - tm(i)$	Duração	Conclusão
A	$tm2 - tm1 = 6$	6	Atividade critica
D	$tm3 - tm2 = 5$	5	Atividade critica
E	$tm4 - tm3 = 4$	4	Atividade critica
C	$tm5 - tm4 = 3$	3	Atividade critica

Conclui-se que as atividades A, D, E e C são críticas. Assim, o caminho crítico é composto por essas atividades.
Para a praça ser terminada são necessários 18 dias, comprovado pela soma das atividades críticas, e pelos cálculos de tempos mais cedo.

2.c)

Atividades	Precedências	Duração
A	---	6
B	A	4+7
C	B,E	3
D	A	5+1
E	D	4

Cálculos tempos mais cedo (tm):
$tm1 = 0\ (nó\ inicial)$
$tm2 = tm1 + 6 = 6$
$tm3 = tm2 + 5 + 1 = 12$
$tm4 = \max\{tm3 + 4, tm2 + 4 + 7\} = \max\{16,17\} = 17$
$tm5 = tm4 + 3 = 20$

Cálculos tempos mais tarde (Tm):
$TM1 = TM2 - 6 = -0$
$TM2 = \min\{TM3 - 5 - 1, TM4 - 4 - 7\} = \min\{6,6\} = 6$
$TM3 = \mathrm{TM4} - 4 = 11$
$TM4 = TM5 - 3 = 17$
$TM5 = 20\ (nó\ final)$

As atividades que unem os nós com tempo mais cedo e tempo mais tarde iguais são candidatas a atividades críticas neste caso os nós 1,2,4 e 5, sendo que o ponto 3 passou a ter folga.

Atividade	$Tm(i+1) - tm(i)$	Duração	Conclusão
A	$tm2 - tm1 = 6$	6	Atividade critica
B	$tm4 - tm2 = 4$	11	Atividade critica
C	$tm5 - tm4 = 3$	3	Atividade critica

Conclui-se que as atividades A, B, e C são críticas. Assim, o caminho crítico é composto por essas atividades.
Para a praça ser terminada são agora necessários 20 dias, comprovado pela soma das atividades críticas, e pelos cálculos de tempos mais cedo.

Quais as consequências para a conclusão do projeto?
R: Um atraso no termino do projeto em dois dias, e mudança do caminho critico do projeto.