Elementos de Probabilidade e Estatística | 21037

Tópicos de resolução/correção do E-Fólio Global

1. Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F). Caso a afirmação seja falsa justifique o motivo. **Por cada resposta errada será descontado 0.5 valores.**

   1.1 A assimetria de uma distribuição empírica não pode ser indicada pelo coeficiente de Pearson.

   1.2 Uma das grandes desvantagens da média é a sua pequena sensibilidade a alterações nos dados.

   1.3 Se A e B forem acontecimentos dependentes então verifica-se sempre a igualdade $P(A \cap B) - P(A)P(B) = 1$.

   1.4 A igualdade $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ verifica-se sempre.

   Resolução:

   1.1 Afirmação falsa. A assimetria de uma distribuição empírica pode ser indicada pelo coeficiente de Pearson.
   `Cotação: 1.0 valores ou -0.5 val.`

   1.2 Afirmação falsa. Uma das grandes desvantagens da média é a sua grande sensibilidade a alterações nos dados.
   `Cotação: 1.0 valores ou -0.5 val.`

   1.3 Afirmação falsa. Suponha-se que A e B são independentes. Então, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ou seja, $P(A \cap B) - P(A)P(B) = 0$. No caso de A e B serem dependentes viria $P(A \cap B) - P(A)P(B) \neq 0$, mas não necessariamente 1.
   `Cotação: 1.0 valores ou -0.5 val.`

   1.4 Afirmação falsa. A igualdade verifica-se apenas quando os momentos de 1ª e 2ª ordem existem.
   `Cotação: 1.0 valores ou -0.5 val.`

2. Seja Y uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por $f(y) = y + ay^2$, com $y \in [0, 1]$ e $a \in [0, 2]$. Determine:

   2.1 O valor de a.

   2.2 A função distribuição de Y.

   2.3 O valor de $P(0.5 < Y < 1)$.

   Resolução:

   2.1
   $$\int_0^1 y + ay^2 dy = 1 \iff \frac{1}{2} + \frac{a}{3} = 1 \iff a = \frac{3}{2}.$$
   Cotação: Cálculo de a: 1.0 val.

2.2 A função distribuição de Y é $F_Y(y) = P(Y \leq y)$. O seu cálculo é dado por:
- Para $y < 0: \quad F_Y(y) = 0$.
- Para $0 \leq y < 1: \quad F_Y(y) = \int\limits_0^y u + \frac{3}{2}u^2 du = \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}$.
- Para $y \geq 1: \quad F_Y(y) = 1$. Assim,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2} & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1. \end{cases}$$

`Cotação: Cálculo da função distribuição: 2.0 val.`

2.3

$$P(0.5 < Y < 1) = F_Y(1) - F_Y(0.5) = 1 - \left(\frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{2}\right) = \frac{13}{16}.$$

`Cotação: Cálculo da probabilidade: 1.0 val.`

3. Considere a variável aleatória X e a sua função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x > 0, \quad \lambda > 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

3.1 Determine a função geradora de momentos de X.

3.2 Considere $\lambda = 1$ e calcule a média e a variância de X.

Resolução:

3.1

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int\limits_0^{+\infty} e^{tx} \cdot 2\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda.$$

Cotação: Cálculo de $M_X(t)$: 1.0 val.

3.2

$$E(X) = \left.\frac{d\, M_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{2}{1-t}\right)'\right|_{t=0} = \left.\frac{2}{(1-t)^2}\right|_{t=0} = 2.$$

$$E(X^2) = \left.\frac{d^2\, M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{2}{(1-t)^2}\right)'\right|_{t=0} = \left.\frac{4}{(1-t)^3}\right|_{t=0} = 4.$$

A variância é dada por

$$\mathrm{Var}\,(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 4 - 2^2 = 0.$$

Cotação: Cálculo de $E(X)$: 1.0 val.
Cotação: Cálculo de $E(X^2)$: 1.0 val.
Cotação: Cálculo de $Var(X)$: 1.0 val.

FIM