Lógica e Teoria de Conjuntos | 21079

Período de Realização

Decorre de 11 a 17 de novembro de 2021

Data de Limite de Entrega

17 de novembro de 2021, até às 23h55 de Portugal Continental

Tema

Cálculo de Proposições

Competências

a) conhecer e aplicar a linguagem do cálculo de proposições;

b) conhecer e aplicar a semântica do cálculo de proposições;

c) construir demonstrações formais no cálculo de proposições.

Trabalho a desenvolver

Deve resolver os quatro exercícios sobre cálculo de proposições constantes no enunciado. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores distribuídos do seguinte modo: 1 valor para cada uma das questões de 1 a 4.

2. Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

3. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Caso não realize o seu E-fólio por escrito mas num outro formato, preencha igualmente o cabeçalho da Folha de Resolução e declare nela que terminou o seu trabalho até à data e hora determinada pelo professor.

Se tiver publicado o seu trabalho na Internet, cole na Folha de Resolução a hiperligação para o mesmo.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar **oito** páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Gilda Ferreira

Enunciado

1. Considere o seguinte critério de convergência conhecido por “Critério d’Alembert”:

“Seja $\sum a_k$ uma série de termos positivos tal que $\lim_{k\to+\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \in \bar{\mathbb{R}}$. Então

- se $\lim_{k\to+\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$, a série $\sum a_k$ é absolutamente convergente;
- se $\lim_{k\to+\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$ ou $\lim_{k\to+\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = +\infty$ ou $\lim_{k\to+\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = 1^+$, a série $\sum a_k$ é divergente;
- se $\lim_{k\to+\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = 1^-$, o teste é inconclusivo."

Considere as seguintes proposições:

p: “$\sum a_k$ é uma série de termos positivos.”

q: “$\lim_{k\to+\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \in \bar{\mathbb{R}}$”

r: “$\lim_{k\to+\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$”

s: “$\lim_{k\to+\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$”

t: “$\lim_{k\to+\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = 1^+$”

m: “$\lim_{k\to+\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = 1^-$”

l: “$\lim_{k\to+\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = +\infty$”

u: “A série $\sum a_k$ é absolutamente convergente.”

v: “A série $\sum a_k$ é divergente.”

w: “O teste é inconclusivo.”

(a) Escreva o Critério d’Alembert na linguagem do cálculo proposicional.

(b) Seja α a fbf $u \to (q \wedge r)$. Indique, justificando, se α é consequência lógica da fórmula que obteve na alínea (a).

(c) Traduza para linguagem natural (português corrente) a fbf α da alínea anterior.

(d) É legítimo concluir que, dado que temos o Critério d’Alembert, a proposição que obteve na alínea (c) é verdadeira? Justifique a sua resposta.

2. Considere o seguinte conjunto de fbf

$$\{ \, p \to \neg q, \; r \wedge q \; , q \to (p \vee r) \; \}.$$

(a) Indique, justificando, se o conjunto acima, de fbf, é satisfazível.

(b) Substituindo no conjunto dado a primeira fbf pela sua contra-recíproca, o conjunto seria satisfazível? Justique a sua resposta.

3. Sejam α a fbf $\neg p \to q \vee (\neg q \wedge (q \to r))$, β a fbf $p \wedge \neg r \wedge (p \to r)$ e γ a fbf $(p \to q) \to p$.

(a) Como classifica as fbf α, β e γ em termos de tautologia, contingência ou contradição? Justifique a sua resposta.

(b) É possível encontrar fbf δ, ϵ e θ tais que substituindo em α, os símbolos proposicionais p, q e r respetivamente por δ, ϵ e θ se obtenha uma contradição? Se sim apresente-as, se não justifique.

(c) É possível encontrar fbf θ e τ tais que substituindo em γ os símbolos proposicionais p e q respetivamente por θ e τ se obtenha uma tautologia? Se sim apresente-as, se não justifique.

4. **(a)** Complete a seguinte demonstração formal no sistema de dedução natural (notação de Lemmon), incluindo todas as fbf e justificações necessárias.

-	1	$\neg\alpha \to \beta$	hip.
-	2	$\gamma \to (\delta \vee \epsilon)$	hip.
-	3	$\delta \to \neg\gamma$	hip.
-	4	$\alpha \to \neg\epsilon$	hip.
$\{5\}$	5		
$\{5\}$	6	$\gamma \to (\delta \vee \epsilon)$	
$\{5\}$	7	$\delta \vee \epsilon$	
$\{5, 8\}$	8	δ	
$\{5, 8\}$	9	$\delta \to \neg\gamma$	
$\{5, 8\}$	10		
$\{5, 8\}$	11	γ	5, $\surd$
$\{5, 8\}$	12		
$\{5, 8\}$	13	β	
$\{5, 14\}$	14	ϵ	
$\{5, 14, 15\}$	15	α	
$\{5, 14, 15\}$	16		4, $\surd$
$\{5, 14, 15\}$	17	$\neg\epsilon$	
$\{5, 14, 15\}$	18		14, $\surd$
$\{5, 14, 15\}$	19		
$\{5, 14\}$	20		15-19, [$\neg$ I]
$\{5, 14\}$	21		1, $\surd$
$\{5, 14\}$	22	β	
$\{5\}$	23		
-	24	$\gamma \to \beta$	

(b) Usando o símbolo $\vdash$, indique o que prova a dedução da alínea (a).

FIM