

U.C. 21076

Investigação Operacional

9 de Junho de 2011

-- INSTRUÇÕES --

- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Sempre que não utilize o enunciado da prova para resposta, poderá ficar na posse do mesmo.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas.
- Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- A prova é constituída por **12 páginas** (incluindo formulário e tabelas) e termina com a palavra **FIM**. O exame contém **5 grupos** de questões.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- É permitida a utilização de máquina de calcular.
- Em anexo são fornecidas tabelas da **distribuição normal padrão** e **t de Student**.

Duração: 2 horas + 30 minutos de tolerância

1. (Resposta: 1+ ½ página)

Uma empresa agrícola dispõe de 4 terrenos, T1, T2, T3 e T4 com características do solo idênticos. As áreas cultiváveis em cada terreno e a disponibilidade de água são conhecidas e estão indicadas na tabela seguinte:

| <i>Terreno</i> | <i>Área cultivável (m²)</i> | <i>Água disponível (m³)</i> |
|----------------|--|--|
| 1 | 4000 | 10000 |
| 2 | 6000 | 12000 |
| 3 | 3000 | 5000 |
| 4 | 5000 | 10000 |

As culturas possíveis de realizar são de 3 tipos: C1, C2 e C3 exigindo estas, diferentes quantidades de água e tendo associados diferentes lucros esperados. Cada tipo de cultura tem limites relativamente à área máxima a cultivar conforme indicado na tabela:

| <i>Cultura</i> | <i>Área max.(m²)</i> | <i>Consumo água (m²)</i> | <i>Lucro €/ (m²)</i> |
|----------------|---------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| C1 | 5000 | 3 | 8 |
| C2 | 6000 | 6 | 10 |
| C3 | 7000 | 5 | 6 |
| C4 | 4000 | 4 | 7 |

A empresa pretende ainda que a percentagem de área cultivada em cada terreno seja igual.

Pretende-se determinar o plano óptimo de produção.

- (0.5)** Indique o objectivo do problema.
- (1.5)** Que decisões podem ser tomadas? Defina rigorosamente as variáveis.
- (1.0)** Quais os condicionalismos existentes? Escreva as restrições do problema.
- (1.0)** Apresente a formulação completa do problema em Programação Linear.

2. (Resposta: 2 + ½ página)

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\max F = 4X + 3Y$$

$$\begin{aligned} \text{s. a.} \quad & 3X + 4Y \leq 12 \\ & 7X + 4Y \leq 14 \\ & X, Y \geq 0 \end{aligned}$$

- (1.0)** Resolva-o graficamente.

- b) (0.5) Transforme as restrições em igualdades através da introdução de variáveis de folga.
- c) (0.5) Escreva o problema na “forma standard”
- d) (0.5) Para resolver o problema pelo Algoritmo do Simplex, precisa de introduzir alguma variável artificial? Justifique e em caso afirmativo proceda à sua introdução.
- e) (1.5) Resolva o problema pelo Algoritmo do Simplex.

3. (Resposta: 1 página)

Um determinado parque de diversões possui uma sala com uma única bilheteira onde são vendidos bilhetes por um único funcionário. Pode considerar-se que as chegadas de visitantes constituem um processo de Poisson, com uma taxa média de 40 chegadas por hora, e estima-se que a duração de cada atendimento se possa considerar exponencialmente distribuído, com valor médio igual a 1 minuto.

- a) (1.0) Determine a probabilidade de estar exactamente 1 visitante na bilheteira.
- b) (1.0) Determine o comprimento médio da fila de espera e o tempo médio de espera na fila por visitante.
- c) (1.0) Indique a probabilidade de que um visitante esteja mais do 2 minutos na bilheteira.
- d) (1.0) Determine a probabilidade de que um cliente esteja mais do que 1 minuto à espera para começar a ser atendido.

4. (Resposta: 2 páginas)

Considere um empreendimento caracterizado pelas atividades, precedências e durações indicadas no seguinte quadro:

| Actividades | Precedências | Duração (dias) | |
|-------------|--------------|----------------|----------|
| | | μ | σ |
| A | - | 20 | 3 |
| B | - | 15 | 1 |
| C | - | 10 | 1 |
| D | A | 5 | 1 |
| E | A,B,G | 10 | 2 |
| F | C | 4 | 1 |
| G | C | 7 | 1 |

- a) (1.0) Trace a rede que representa o empreendimento.
- b) (1.0) Determine a duração total média empreendimento.
- c) (1.0) Determine o caminho crítico médio (C.C.M.) do empreendimento.
- d) Recorra à Técnica PERT e calcule:
 - d.1) (0.5) A probabilidade da duração do empreendimento ser inferior a 30 dias.
 - d.2) (0.5) A probabilidade da duração total do empreendimento exceder 36 dias.

5. (Resposta: 1 página)

Considere o seguinte jogo aleatório:

Em cada jogada, duas rodas giratórias constituídas por várias cores são postas a girar pelo custo de 40 u.m.. O jogo termina quando as cores saídas nas duas rodas forem iguais, recebendo o jogador um prémio de acordo com o indicado na tabela seguinte:

| Cor | Branca | Azul | Vermelho |
|---------------|--------|------|----------|
| Prémio (u.m.) | 150 | 400 | 250 |

As cores distribuem-se nas duas rodas das seguintes maneiras:

Roda 1: 5 partes brancas, 25 partes azuis, 10 partes verdes e 10 partes vermelhas.

Roda 2: 25 partes brancas, 5 partes azuis, 5 partes vermelhas e 15 partes pretas.

Admita que à invocação da rotina **RANDOM** é afectado um **NPA Unif [0,1]** à variável **U**

- a) (1.0) Elabore uma rotina que proceda à geração da cor saída na Roda 2, numa jogada.
- b) (1.5) Elabore uma rotina que proceda à geração de uma jogada.
- c) (1.5) Elabore um modelo simplificado de simulação que permita estudar a distribuição do ganho associado a este jogo.

Formulário de Filas de Espera

Sistema M/M/1, População = ∞; Fila máxima = ∞

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo.

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de μ clientes por unidade de tempo (pelo **único servidor**).

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** $\rho = \lambda / \mu$ ($\rho < 1$)

Taxa de **desocupação** $= 1 - \rho = P_0 = P(W_q = 0)$

$$L = L_q + \lambda / \mu$$

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W = W_q + 1 / \mu$$

$$W = L / \lambda = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = L_q / \lambda = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

$$P_0 = 1 - \rho = P(W_q = 0)$$

$$P_n = \rho^n P_0 = \rho^n (1 - \rho)$$

$$P(n > k) = \rho^{k+1}$$

$$P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t} = \rho e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$$

Sistema M/M/S, População = ∞; Fila máxima = ∞

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo.

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos S servidores.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 0, 1, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S + 1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** $\rho = \lambda / (S \mu)$ ($\rho < 1$)

Taxa de **desocupação** = $1 - \rho$

$$L = L_q + \lambda / \mu$$

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2}$$

$$W = W_q + 1 / \mu = L / \lambda$$

$$W_q = L_q / \lambda$$

$$P_0 = \left[\frac{S^S \rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^S \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1, \dots, S \\ \frac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n \geq S + 1, \end{cases}$$

$$P(W > t) = e^{-\mu t} \left[1 + \frac{(S\rho)^S P_0 (1 - e^{-\mu t(S-1-S\rho)})}{S!(1-\rho)(S-1-S\rho)} \right] \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(W_q > t) = \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^{-S\mu t(1-\rho)} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(W_q = 0) = 1 - \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)}$$

Sistema M/M/1/K, População = ∞ ; Fila máxima = $K - 1$

Número máximo de clientes no sistema = K

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** no sistema será dependente do estado n do sistema (isto é, do número n de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0, 1, \dots, K - 1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases} ; \quad \bar{\lambda} = \lambda (1 - P_K)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de μ clientes por unidade de tempo (pelo **único servidor**).

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **pressão** $\rho = \lambda / \mu$

Taxa de **ocupação** = $\bar{\lambda} / \mu$

Taxa de **desocupação** = $1 - \bar{\lambda} / \mu = P_0 = P(W_q = 0) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$

$$L = \begin{cases} \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{(K + 1)\rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}} & ; \rho \neq 1 \\ \frac{K}{2} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

$$L_q = L - \bar{\lambda} / \mu$$

$$W = W_q + 1 / \mu$$

$$W = L / \bar{\lambda}$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} = P(W_q = 0)$$

$$P_n = \begin{cases} \rho^n P_0 & ; \rho \neq 1 \wedge n \leq K \\ K / 2 & ; \rho = 1 \wedge n \leq K \\ 0 & ; n > K \end{cases}$$

Sistema M/M/S/K, População = ∞ ; Fila máxima = $K - S$

$S \leq K$; N° máximo de clientes no sistema= K ; N° de servidores= S

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do estado n do sistema (isto é, do número n de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases} ; \bar{\lambda} = \lambda (1 - P_K)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos S **servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1, 2, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **pressão** $\rho = \lambda / (S \mu)$

Taxa de **ocupação** = $\bar{\lambda} / (S \mu)$

Taxa de **desocupação** = $1 - \bar{\lambda} / (S \mu)$

$$P_0 = \begin{cases} \left[\frac{S^S \rho^{S+1} (1 - \rho^{K-S})}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^S \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho \neq 1 \\ \left[\frac{S^S}{S!} (K-S) + \sum_{n=0}^S \frac{S^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1, \dots, S \\ \frac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n = S+1, \dots, K \\ 0 & ; n \geq K+1 \end{cases}$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2} [1 - \rho^{K-S} - (1-\rho)(K-S)\rho^{K-S}]$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$W = W_q + 1/\mu ; L = \bar{\lambda} W = L_q + \bar{\lambda} / \mu$$

Sistema M/M/S/N, População = N (Fila máxima = N - S)

$S \leq N$; N° máximo de clientes no sistema=N; N° de servidores=S

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do estado n do sistema (isto é, do número n de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(N-n) & ; n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & ; n \geq N \end{cases} ; \bar{\lambda} = \lambda(N-S)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos **S servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1, 2, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** = $\bar{\lambda} / (S\mu)$

Taxa de **desocupação** = $1 - \bar{\lambda} / (S\mu)$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=S}^N \frac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}$$

Caso particular $S = 1$:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1} = \text{taxa de desocupação}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = 1, \dots, S \\ \frac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = S+1, \dots, N \\ 0 & ; n \geq N+1 \end{cases}$$

Caso particular $S = 1$:

$$P_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = 1, \dots, N \\ 0 & ; n > N \end{cases}$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

- continua -

- continuação -

$$L_q = \sum_{n=0}^N (n - S)P_n$$

Caso particular $S = 1$:

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$W = W_q + 1 / \mu \quad ; \quad L = \bar{\lambda} \quad W = L_q + \bar{\lambda} / \mu$$

Distribuição Normal Padrão
 $D(Z)=P(-z<Z<z)$; $\Phi(Z)=P(Z<z)$

| Z | $\Phi(-Z)$ | $\Phi(Z)$ | D(Z) | Z | $\Phi(-Z)$ | $\Phi(Z)$ | D(Z) | Z | $\Phi(-Z)$ | $\Phi(Z)$ | D(Z) | Z | $\Phi(-Z)$ | $\Phi(Z)$ | D(Z) |
|------|------------|-----------|--------|------|------------|-----------|--------|------|------------|-----------|--------|------|------------|-----------|--------|
| 0,01 | 0,4960 | 0,5040 | 0,0080 | 0,76 | 0,2236 | 0,7764 | 0,5527 | 1,51 | 0,0655 | 0,9345 | 0,8690 | 2,26 | 0,0119 | 0,9881 | 0,9762 |
| 0,02 | 0,4920 | 0,5080 | 0,0160 | 0,77 | 0,2206 | 0,7794 | 0,5587 | 1,52 | 0,0643 | 0,9357 | 0,8715 | 2,27 | 0,0116 | 0,9884 | 0,9768 |
| 0,03 | 0,4880 | 0,5120 | 0,0239 | 0,78 | 0,2177 | 0,7823 | 0,5646 | 1,53 | 0,0630 | 0,9370 | 0,8740 | 2,28 | 0,0113 | 0,9887 | 0,9774 |
| 0,04 | 0,4840 | 0,5160 | 0,0319 | 0,79 | 0,2148 | 0,7852 | 0,5705 | 1,54 | 0,0618 | 0,9382 | 0,8764 | 2,29 | 0,0110 | 0,9890 | 0,9780 |
| 0,05 | 0,4801 | 0,5199 | 0,0399 | 0,8 | 0,2119 | 0,7881 | 0,5763 | 1,55 | 0,0606 | 0,9394 | 0,8789 | 2,3 | 0,0107 | 0,9893 | 0,9786 |
| 0,06 | 0,4761 | 0,5239 | 0,0478 | 0,81 | 0,2090 | 0,7910 | 0,5821 | 1,56 | 0,0594 | 0,9406 | 0,8812 | 2,31 | 0,0104 | 0,9896 | 0,9791 |
| 0,07 | 0,4721 | 0,5279 | 0,0558 | 0,82 | 0,2061 | 0,7939 | 0,5878 | 1,57 | 0,0582 | 0,9418 | 0,8836 | 2,32 | 0,0102 | 0,9898 | 0,9797 |
| 0,08 | 0,4681 | 0,5319 | 0,0638 | 0,83 | 0,2033 | 0,7967 | 0,5935 | 1,58 | 0,0571 | 0,9429 | 0,8859 | 2,33 | 0,0099 | 0,9901 | 0,9802 |
| 0,09 | 0,4641 | 0,5359 | 0,0717 | 0,84 | 0,2005 | 0,7995 | 0,5991 | 1,59 | 0,0559 | 0,9441 | 0,8882 | 2,34 | 0,0096 | 0,9904 | 0,9807 |
| 0,1 | 0,4602 | 0,5398 | 0,0797 | 0,85 | 0,1977 | 0,8023 | 0,6047 | 1,6 | 0,0548 | 0,9452 | 0,8904 | 2,35 | 0,0094 | 0,9906 | 0,9812 |
| 0,11 | 0,4562 | 0,5438 | 0,0876 | 0,86 | 0,1949 | 0,8051 | 0,6102 | 1,61 | 0,0537 | 0,9463 | 0,8926 | 2,36 | 0,0091 | 0,9909 | 0,9817 |
| 0,12 | 0,4522 | 0,5478 | 0,0955 | 0,87 | 0,1922 | 0,8078 | 0,6157 | 1,62 | 0,0526 | 0,9474 | 0,8948 | 2,37 | 0,0089 | 0,9911 | 0,9822 |
| 0,13 | 0,4483 | 0,5517 | 0,1034 | 0,88 | 0,1894 | 0,8106 | 0,6211 | 1,63 | 0,0516 | 0,9484 | 0,8969 | 2,38 | 0,0087 | 0,9913 | 0,9827 |
| 0,14 | 0,4443 | 0,5557 | 0,1113 | 0,89 | 0,1867 | 0,8133 | 0,6265 | 1,64 | 0,0505 | 0,9495 | 0,8990 | 2,39 | 0,0084 | 0,9916 | 0,9832 |
| 0,15 | 0,4404 | 0,5596 | 0,1192 | 0,9 | 0,1841 | 0,8159 | 0,6319 | 1,65 | 0,0495 | 0,9505 | 0,9011 | 2,4 | 0,0082 | 0,9918 | 0,9836 |
| 0,16 | 0,4364 | 0,5636 | 0,1271 | 0,91 | 0,1814 | 0,8186 | 0,6372 | 1,66 | 0,0485 | 0,9515 | 0,9031 | 2,41 | 0,0080 | 0,9920 | 0,9840 |
| 0,17 | 0,4325 | 0,5675 | 0,1350 | 0,92 | 0,1788 | 0,8212 | 0,6424 | 1,67 | 0,0475 | 0,9525 | 0,9051 | 2,42 | 0,0078 | 0,9922 | 0,9845 |
| 0,18 | 0,4286 | 0,5714 | 0,1428 | 0,93 | 0,1762 | 0,8238 | 0,6476 | 1,68 | 0,0465 | 0,9535 | 0,9070 | 2,43 | 0,0075 | 0,9925 | 0,9849 |
| 0,19 | 0,4247 | 0,5753 | 0,1507 | 0,94 | 0,1736 | 0,8264 | 0,6528 | 1,69 | 0,0455 | 0,9545 | 0,9090 | 2,44 | 0,0073 | 0,9927 | 0,9853 |
| 0,2 | 0,4207 | 0,5793 | 0,1585 | 0,95 | 0,1711 | 0,8289 | 0,6579 | 1,7 | 0,0446 | 0,9554 | 0,9109 | 2,45 | 0,0071 | 0,9929 | 0,9857 |
| 0,21 | 0,4168 | 0,5832 | 0,1663 | 0,96 | 0,1685 | 0,8315 | 0,6629 | 1,71 | 0,0436 | 0,9564 | 0,9127 | 2,46 | 0,0069 | 0,9931 | 0,9861 |
| 0,22 | 0,4129 | 0,5871 | 0,1741 | 0,97 | 0,1660 | 0,8340 | 0,6680 | 1,72 | 0,0427 | 0,9573 | 0,9146 | 2,47 | 0,0068 | 0,9932 | 0,9865 |
| 0,23 | 0,4090 | 0,5910 | 0,1819 | 0,98 | 0,1635 | 0,8365 | 0,6729 | 1,73 | 0,0418 | 0,9582 | 0,9164 | 2,48 | 0,0066 | 0,9934 | 0,9869 |
| 0,24 | 0,4052 | 0,5948 | 0,1897 | 0,99 | 0,1611 | 0,8389 | 0,6778 | 1,74 | 0,0409 | 0,9591 | 0,9181 | 2,49 | 0,0064 | 0,9936 | 0,9872 |
| 0,25 | 0,4013 | 0,5987 | 0,1974 | 1 | 0,1587 | 0,8413 | 0,6827 | 1,75 | 0,0401 | 0,9599 | 0,9199 | 2,5 | 0,0062 | 0,9938 | 0,9876 |
| 0,26 | 0,3974 | 0,6026 | 0,2051 | 1,01 | 0,1562 | 0,8438 | 0,6875 | 1,76 | 0,0392 | 0,9608 | 0,9216 | 2,51 | 0,0060 | 0,9940 | 0,9879 |
| 0,27 | 0,3936 | 0,6064 | 0,2128 | 1,02 | 0,1539 | 0,8461 | 0,6923 | 1,77 | 0,0384 | 0,9616 | 0,9233 | 2,52 | 0,0059 | 0,9941 | 0,9883 |
| 0,28 | 0,3897 | 0,6103 | 0,2205 | 1,03 | 0,1515 | 0,8485 | 0,6970 | 1,78 | 0,0375 | 0,9625 | 0,9249 | 2,53 | 0,0057 | 0,9943 | 0,9886 |
| 0,29 | 0,3859 | 0,6141 | 0,2282 | 1,04 | 0,1492 | 0,8508 | 0,7017 | 1,79 | 0,0367 | 0,9633 | 0,9265 | 2,54 | 0,0055 | 0,9945 | 0,9889 |
| 0,3 | 0,3821 | 0,6179 | 0,2358 | 1,05 | 0,1469 | 0,8531 | 0,7063 | 1,8 | 0,0359 | 0,9641 | 0,9281 | 2,55 | 0,0054 | 0,9946 | 0,9892 |
| 0,31 | 0,3783 | 0,6217 | 0,2434 | 1,06 | 0,1446 | 0,8554 | 0,7109 | 1,81 | 0,0351 | 0,9649 | 0,9297 | 2,56 | 0,0052 | 0,9948 | 0,9895 |
| 0,32 | 0,3745 | 0,6255 | 0,2510 | 1,07 | 0,1423 | 0,8577 | 0,7154 | 1,82 | 0,0344 | 0,9656 | 0,9312 | 2,57 | 0,0051 | 0,9949 | 0,9898 |
| 0,33 | 0,3707 | 0,6293 | 0,2586 | 1,08 | 0,1401 | 0,8599 | 0,7199 | 1,83 | 0,0336 | 0,9664 | 0,9328 | 2,58 | 0,0049 | 0,9951 | 0,9901 |
| 0,34 | 0,3669 | 0,6331 | 0,2661 | 1,09 | 0,1379 | 0,8621 | 0,7243 | 1,84 | 0,0329 | 0,9671 | 0,9342 | 2,59 | 0,0048 | 0,9952 | 0,9904 |
| 0,35 | 0,3632 | 0,6368 | 0,2737 | 1,1 | 0,1357 | 0,8643 | 0,7287 | 1,85 | 0,0322 | 0,9678 | 0,9357 | 2,6 | 0,0047 | 0,9953 | 0,9907 |
| 0,36 | 0,3594 | 0,6406 | 0,2812 | 1,11 | 0,1335 | 0,8665 | 0,7330 | 1,86 | 0,0314 | 0,9686 | 0,9371 | 2,61 | 0,0045 | 0,9955 | 0,9909 |
| 0,37 | 0,3557 | 0,6443 | 0,2886 | 1,12 | 0,1314 | 0,8686 | 0,7373 | 1,87 | 0,0307 | 0,9693 | 0,9385 | 2,62 | 0,0044 | 0,9956 | 0,9912 |
| 0,38 | 0,3520 | 0,6480 | 0,2961 | 1,13 | 0,1292 | 0,8707 | 0,7415 | 1,88 | 0,0301 | 0,9699 | 0,9399 | 2,63 | 0,0043 | 0,9957 | 0,9915 |
| 0,39 | 0,3483 | 0,6517 | 0,3035 | 1,14 | 0,1271 | 0,8729 | 0,7457 | 1,89 | 0,0294 | 0,9706 | 0,9412 | 2,64 | 0,0041 | 0,9959 | 0,9917 |
| 0,4 | 0,3446 | 0,6554 | 0,3108 | 1,15 | 0,1251 | 0,8749 | 0,7499 | 1,9 | 0,0287 | 0,9713 | 0,9426 | 2,65 | 0,0040 | 0,9960 | 0,9920 |
| 0,41 | 0,3409 | 0,6591 | 0,3182 | 1,16 | 0,1230 | 0,8770 | 0,7540 | 1,91 | 0,0281 | 0,9719 | 0,9439 | 2,66 | 0,0039 | 0,9961 | 0,9922 |
| 0,42 | 0,3372 | 0,6628 | 0,3255 | 1,17 | 0,1210 | 0,8790 | 0,7580 | 1,92 | 0,0274 | 0,9726 | 0,9451 | 2,67 | 0,0038 | 0,9962 | 0,9924 |
| 0,43 | 0,3336 | 0,6664 | 0,3328 | 1,18 | 0,1190 | 0,8810 | 0,7620 | 1,93 | 0,0268 | 0,9732 | 0,9464 | 2,68 | 0,0037 | 0,9963 | 0,9926 |
| 0,44 | 0,3300 | 0,6700 | 0,3401 | 1,19 | 0,1170 | 0,8830 | 0,7660 | 1,94 | 0,0262 | 0,9738 | 0,9476 | 2,69 | 0,0036 | 0,9964 | 0,9929 |
| 0,45 | 0,3264 | 0,6736 | 0,3473 | 1,2 | 0,1151 | 0,8849 | 0,7699 | 1,95 | 0,0256 | 0,9744 | 0,9488 | 2,7 | 0,0035 | 0,9965 | 0,9931 |
| 0,46 | 0,3228 | 0,6772 | 0,3545 | 1,21 | 0,1131 | 0,8869 | 0,7737 | 1,96 | 0,0250 | 0,9750 | 0,9500 | 2,71 | 0,0034 | 0,9966 | 0,9933 |
| 0,47 | 0,3192 | 0,6808 | 0,3616 | 1,22 | 0,1112 | 0,8888 | 0,7775 | 1,97 | 0,0244 | 0,9756 | 0,9512 | 2,72 | 0,0033 | 0,9967 | 0,9935 |
| 0,48 | 0,3156 | 0,6844 | 0,3688 | 1,23 | 0,1093 | 0,8907 | 0,7813 | 1,98 | 0,0239 | 0,9761 | 0,9523 | 2,73 | 0,0032 | 0,9968 | 0,9937 |
| 0,49 | 0,3121 | 0,6879 | 0,3759 | 1,24 | 0,1075 | 0,8925 | 0,7850 | 1,99 | 0,0233 | 0,9767 | 0,9534 | 2,74 | 0,0031 | 0,9969 | 0,9939 |
| 0,5 | 0,3085 | 0,6915 | 0,3829 | 1,25 | 0,1056 | 0,8944 | 0,7887 | 2 | 0,0228 | 0,9772 | 0,9545 | 2,75 | 0,0030 | 0,9970 | 0,9940 |
| 0,51 | 0,3050 | 0,6950 | 0,3899 | 1,26 | 0,1038 | 0,8962 | 0,7923 | 2,01 | 0,0222 | 0,9778 | 0,9556 | 2,76 | 0,0029 | 0,9971 | 0,9942 |
| 0,52 | 0,3015 | 0,6985 | 0,3969 | 1,27 | 0,1020 | 0,8980 | 0,7959 | 2,02 | 0,0217 | 0,9783 | 0,9566 | 2,77 | 0,0028 | 0,9972 | 0,9944 |
| 0,53 | 0,2981 | 0,7019 | 0,4039 | 1,28 | 0,1003 | 0,8997 | 0,7995 | 2,03 | 0,0212 | 0,9788 | 0,9576 | 2,78 | 0,0027 | 0,9973 | 0,9946 |
| 0,54 | 0,2946 | 0,7054 | 0,4108 | 1,29 | 0,0985 | 0,9015 | 0,8029 | 2,04 | 0,0207 | 0,9793 | 0,9586 | 2,79 | 0,0026 | 0,9974 | 0,9947 |
| 0,55 | 0,2912 | 0,7088 | 0,4177 | 1,3 | 0,0968 | 0,9032 | 0,8064 | 2,05 | 0,0202 | 0,9798 | 0,9596 | 2,8 | 0,0025 | 0,9975 | 0,9949 |
| 0,56 | 0,2877 | 0,7123 | 0,4245 | 1,31 | 0,0951 | 0,9049 | 0,8098 | 2,06 | 0,0197 | 0,9803 | 0,9606 | 2,81 | 0,0025 | 0,9975 | 0,9950 |
| 0,57 | 0,2843 | 0,7157 | 0,4313 | 1,32 | 0,0934 | 0,9066 | 0,8132 | 2,07 | 0,0192 | 0,9808 | 0,9615 | 2,82 | 0,0024 | 0,9976 | 0,9952 |
| 0,58 | 0,2810 | 0,7190 | 0,4381 | 1,33 | 0,0918 | 0,9082 | 0,8165 | 2,08 | 0,0188 | 0,9812 | 0,9625 | 2,83 | 0,0023 | 0,9977 | 0,9953 |
| 0,59 | 0,2776 | 0,7224 | 0,4448 | 1,34 | 0,0901 | 0,9099 | 0,8198 | 2,09 | 0,0183 | 0,9817 | 0,9634 | 2,84 | 0,0023 | 0,9977 | 0,9955 |
| 0,6 | 0,2743 | 0,7257 | 0,4515 | 1,35 | 0,0885 | 0,9115 | 0,8230 | 2,1 | 0,0179 | 0,9821 | 0,9643 | 2,85 | 0,0022 | 0,9978 | 0,9956 |
| 0,61 | 0,2709 | 0,7291 | 0,4581 | 1,36 | 0,0869 | 0,9131 | 0,8262 | 2,11 | 0,0174 | 0,9826 | 0,9651 | 2,86 | 0,0021 | 0,9979 | 0,9958 |
| 0,62 | 0,2676 | 0,7324 | 0,4647 | 1,37 | 0,0853 | 0,9147 | 0,8293 | 2,12 | 0,0170 | 0,9830 | 0,9660 | 2,87 | 0,0021 | 0,9979 | 0,9959 |
| 0,63 | 0,2643 | 0,7357 | 0,4713 | 1,38 | 0,0838 | 0,9162 | 0,8324 | 2,13 | 0,0166 | 0,9834 | 0,9668 | 2,88 | 0,0020 | 0,9980 | 0,9960 |
| 0,64 | 0,2611 | 0,7389 | 0,4778 | 1,39 | 0,0823 | 0,9177 | 0,8355 | 2,14 | 0,0162 | 0,9838 | 0,9676 | 2,89 | 0,0019 | 0,9981 | 0,9961 |
| 0,65 | 0,2578 | 0,7422 | 0,4843 | 1,4 | 0,0808 | 0,9192 | 0,8385 | 2,15 | 0,0158 | 0,9842 | 0,9684 | 2,9 | 0,0019 | 0,9981 | 0,9963 |
| 0,66 | 0,2546 | 0,7454 | 0,4907 | 1,41 | 0,0793 | 0,9207 | 0,8415 | 2,16 | 0,0154 | 0,9846 | 0,9692 | 2,91 | 0,0018 | 0,9982 | 0,9964 |
| 0,67 | 0,2514 | 0,7486 | 0,4971 | 1,42 | 0,0778 | 0,9222 | 0,8444 | 2,17 | 0,0150 | 0,9850 | 0,9700 | 2,92 | 0,0018 | 0,9982 | 0,9965 |
| 0,68 | 0,2483 | 0,7517 | 0,5035 | 1,43 | 0,0764 | 0,9236 | 0,8473 | 2,18 | 0,0146 | 0,9854 | 0,9707 | 2,93 | 0,0017 | 0,9983 | 0,9966 |
| 0,69 | 0,2451 | 0,7549 | 0,5098 | 1,44 | 0,0749 | 0,9251 | 0,8501 | 2,19 | 0,0143 | 0,9857 | 0,9715 | 2,94 | 0,0016 | 0,9984 | 0,9967 |
| 0,7 | 0,2420 | 0,7580 | 0,5161 | 1,45 | 0,0735 | 0,9265 | 0,8529 | 2,2 | 0,0139 | 0,9861 | 0,9722 | 2,95 | 0,0016 | 0,9984 | 0,9968 |
| 0,71 | 0,2389 | 0,7611 | | | | | | | | | | | | | |

Tabela Distribuição t de Student

| g.l. | 0,75 | 0,9 | 0,95 | 0,975 | 0,99 | 0,995 |
|------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| 1 | 1,0000 | 3,0777 | 6,3138 | 12,7062 | 31,8205 | 63,6567 |
| 2 | 0,8165 | 1,8856 | 2,9200 | 4,3027 | 6,9646 | 9,9248 |
| 3 | 0,7649 | 1,6377 | 2,3534 | 3,1824 | 4,5407 | 5,8409 |
| 4 | 0,7407 | 1,5332 | 2,1318 | 2,7764 | 3,7469 | 4,6041 |
| 5 | 0,7267 | 1,4759 | 2,0150 | 2,5706 | 3,3649 | 4,0321 |
| 6 | 0,7176 | 1,4398 | 1,9432 | 2,4469 | 3,1427 | 3,7074 |
| 7 | 0,7111 | 1,4149 | 1,8946 | 2,3646 | 2,9980 | 3,4995 |
| 8 | 0,7064 | 1,3968 | 1,8595 | 2,3060 | 2,8965 | 3,3554 |
| 9 | 0,7027 | 1,3830 | 1,8331 | 2,2622 | 2,8214 | 3,2498 |
| 10 | 0,6998 | 1,3722 | 1,8125 | 2,2281 | 2,7638 | 3,1693 |
| 11 | 0,6974 | 1,3634 | 1,7959 | 2,2010 | 2,7181 | 3,1058 |
| 12 | 0,6955 | 1,3562 | 1,7823 | 2,1788 | 2,6810 | 3,0545 |
| 13 | 0,6938 | 1,3502 | 1,7709 | 2,1604 | 2,6503 | 3,0123 |
| 14 | 0,6924 | 1,3450 | 1,7613 | 2,1448 | 2,6245 | 2,9768 |
| 15 | 0,6912 | 1,3406 | 1,7531 | 2,1314 | 2,6025 | 2,9467 |
| 16 | 0,6901 | 1,3368 | 1,7459 | 2,1199 | 2,5835 | 2,9208 |
| 17 | 0,6892 | 1,3334 | 1,7396 | 2,1098 | 2,5669 | 2,8982 |
| 18 | 0,6884 | 1,3304 | 1,7341 | 2,1009 | 2,5524 | 2,8784 |
| 19 | 0,6876 | 1,3277 | 1,7291 | 2,0930 | 2,5395 | 2,8609 |
| 20 | 0,6870 | 1,3253 | 1,7247 | 2,0860 | 2,5280 | 2,8453 |
| 21 | 0,6864 | 1,3232 | 1,7207 | 2,0796 | 2,5176 | 2,8314 |
| 22 | 0,6858 | 1,3212 | 1,7171 | 2,0739 | 2,5083 | 2,8188 |
| 23 | 0,6853 | 1,3195 | 1,7139 | 2,0687 | 2,4999 | 2,8073 |
| 24 | 0,6848 | 1,3178 | 1,7109 | 2,0639 | 2,4922 | 2,7969 |
| 25 | 0,6844 | 1,3163 | 1,7081 | 2,0595 | 2,4851 | 2,7874 |
| 26 | 0,6840 | 1,3150 | 1,7056 | 2,0555 | 2,4786 | 2,7787 |
| 27 | 0,6837 | 1,3137 | 1,7033 | 2,0518 | 2,4727 | 2,7707 |
| 28 | 0,6834 | 1,3125 | 1,7011 | 2,0484 | 2,4671 | 2,7633 |
| 29 | 0,6830 | 1,3114 | 1,6991 | 2,0452 | 2,4620 | 2,7564 |
| 30 | 0,6828 | 1,3104 | 1,6973 | 2,0423 | 2,4573 | 2,7500 |
| 31 | 0,6825 | 1,3095 | 1,6955 | 2,0395 | 2,4528 | 2,7440 |
| 32 | 0,6822 | 1,3086 | 1,6939 | 2,0369 | 2,4487 | 2,7385 |
| 33 | 0,6820 | 1,3077 | 1,6924 | 2,0345 | 2,4448 | 2,7333 |
| 34 | 0,6818 | 1,3070 | 1,6909 | 2,0322 | 2,4411 | 2,7284 |
| 35 | 0,6816 | 1,3062 | 1,6896 | 2,0301 | 2,4377 | 2,7238 |
| 36 | 0,6814 | 1,3055 | 1,6883 | 2,0281 | 2,4345 | 2,7195 |
| 37 | 0,6812 | 1,3049 | 1,6871 | 2,0262 | 2,4314 | 2,7154 |
| 38 | 0,6810 | 1,3042 | 1,6860 | 2,0244 | 2,4286 | 2,7116 |
| 39 | 0,6808 | 1,3036 | 1,6849 | 2,0227 | 2,4258 | 2,7079 |
| 40 | 0,6807 | 1,3031 | 1,6839 | 2,0211 | 2,4233 | 2,7045 |
| 41 | 0,6805 | 1,3025 | 1,6829 | 2,0195 | 2,4208 | 2,7012 |
| 42 | 0,6804 | 1,3020 | 1,6820 | 2,0181 | 2,4185 | 2,6981 |
| 43 | 0,6802 | 1,3016 | 1,6811 | 2,0167 | 2,4163 | 2,6951 |
| 44 | 0,6801 | 1,3011 | 1,6802 | 2,0154 | 2,4141 | 2,6923 |

| g.l. | 0,75 | 0,9 | 0,95 | 0,975 | 0,99 | 0,995 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 47 | 0,6797 | 1,2998 | 1,6779 | 2,0117 | 2,4083 | 2,6846 |
| 48 | 0,6796 | 1,2994 | 1,6772 | 2,0106 | 2,4066 | 2,6822 |
| 49 | 0,6795 | 1,2991 | 1,6766 | 2,0096 | 2,4049 | 2,6800 |
| 50 | 0,6794 | 1,2987 | 1,6759 | 2,0086 | 2,4033 | 2,6778 |
| 51 | 0,6793 | 1,2984 | 1,6753 | 2,0076 | 2,4017 | 2,6757 |
| 52 | 0,6792 | 1,2980 | 1,6747 | 2,0066 | 2,4002 | 2,6737 |
| 53 | 0,6791 | 1,2977 | 1,6741 | 2,0057 | 2,3988 | 2,6718 |
| 54 | 0,6791 | 1,2974 | 1,6736 | 2,0049 | 2,3974 | 2,6700 |
| 55 | 0,6790 | 1,2971 | 1,6730 | 2,0040 | 2,3961 | 2,6682 |
| 56 | 0,6789 | 1,2969 | 1,6725 | 2,0032 | 2,3948 | 2,6665 |
| 57 | 0,6788 | 1,2966 | 1,6720 | 2,0025 | 2,3936 | 2,6649 |
| 58 | 0,6787 | 1,2963 | 1,6716 | 2,0017 | 2,3924 | 2,6633 |
| 59 | 0,6787 | 1,2961 | 1,6711 | 2,0010 | 2,3912 | 2,6618 |
| 60 | 0,6786 | 1,2958 | 1,6706 | 2,0003 | 2,3901 | 2,6603 |
| 61 | 0,6785 | 1,2956 | 1,6702 | 1,9996 | 2,3890 | 2,6589 |
| 62 | 0,6785 | 1,2954 | 1,6698 | 1,9990 | 2,3880 | 2,6575 |
| 63 | 0,6784 | 1,2951 | 1,6694 | 1,9983 | 2,3870 | 2,6561 |
| 64 | 0,6783 | 1,2949 | 1,6690 | 1,9977 | 2,3860 | 2,6549 |
| 65 | 0,6783 | 1,2947 | 1,6686 | 1,9971 | 2,3851 | 2,6536 |
| 66 | 0,6782 | 1,2945 | 1,6683 | 1,9966 | 2,3842 | 2,6524 |
| 67 | 0,6782 | 1,2943 | 1,6679 | 1,9960 | 2,3833 | 2,6512 |
| 68 | 0,6781 | 1,2941 | 1,6676 | 1,9955 | 2,3824 | 2,6501 |
| 69 | 0,6781 | 1,2939 | 1,6672 | 1,9949 | 2,3816 | 2,6490 |
| 70 | 0,6780 | 1,2938 | 1,6669 | 1,9944 | 2,3808 | 2,6479 |
| 71 | 0,6780 | 1,2936 | 1,6666 | 1,9939 | 2,3800 | 2,6469 |
| 72 | 0,6779 | 1,2934 | 1,6663 | 1,9935 | 2,3793 | 2,6459 |
| 73 | 0,6779 | 1,2933 | 1,6660 | 1,9930 | 2,3785 | 2,6449 |
| 74 | 0,6778 | 1,2931 | 1,6657 | 1,9925 | 2,3778 | 2,6439 |
| 75 | 0,6778 | 1,2929 | 1,6654 | 1,9921 | 2,3771 | 2,6430 |
| 76 | 0,6777 | 1,2928 | 1,6652 | 1,9917 | 2,3764 | 2,6421 |
| 77 | 0,6777 | 1,2926 | 1,6649 | 1,9913 | 2,3758 | 2,6412 |
| 78 | 0,6776 | 1,2925 | 1,6646 | 1,9908 | 2,3751 | 2,6403 |
| 79 | 0,6776 | 1,2924 | 1,6644 | 1,9905 | 2,3745 | 2,6395 |
| 80 | 0,6776 | 1,2922 | 1,6641 | 1,9901 | 2,3739 | 2,6387 |
| 81 | 0,6775 | 1,2921 | 1,6639 | 1,9897 | 2,3733 | 2,6379 |
| 82 | 0,6775 | 1,2920 | 1,6636 | 1,9893 | 2,3727 | 2,6371 |
| 83 | 0,6775 | 1,2918 | 1,6634 | 1,9890 | 2,3721 | 2,6364 |
| 84 | 0,6774 | 1,2917 | 1,6632 | 1,9886 | 2,3716 | 2,6356 |
| 85 | 0,6774 | 1,2916 | 1,6630 | 1,9883 | 2,3710 | 2,6349 |
| 86 | 0,6774 | 1,2915 | 1,6628 | 1,9879 | 2,3705 | 2,6342 |
| 87 | 0,6773 | 1,2914 | 1,6626 | 1,9876 | 2,3700 | 2,6335 |
| 88 | 0,6773 | 1,2912 | 1,6624 | 1,9873 | 2,3695 | 2,6329 |
| 89 | 0,6773 | 1,2911 | 1,6622 | 1,9870 | 2,3690 | 2,6322 |
| 90 | 0,6772 | 1,2910 | 1,6620 | 1,9867 | 2,3685 | 2,6316 |

FIM