

**U.C. 21082**  
**Matemática Finita**

**11 de setembro de 2014**

**- INSTRUÇÕES -**

- O exame é composto por 8 grupos de questões, contém 4 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 5, 6, 7 e 8 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- O exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

**CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO**

- Com exceção das 4 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado  $\frac{1}{3}$  de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8
4.5	3.5	3.0	5.0

Nome: .....

N<sup>o</sup> de Estudante: ..... B. I. n<sup>o</sup> .....

Turma ..... Assinatura do Vigilante: .....

---

### Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando  $\times$  no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos tais que  $\mathbb{N} \subseteq A$  e  $B \subseteq \mathbb{Q}$ . Qual dos seguintes conjuntos é necessariamente enumerável?

- a)  $A$ .  c)  $B \times \mathbb{Q}$ .  
 b)  $A \times B$ .  d)  $\mathbb{R} \setminus A$ .

2. Dados  $0 \leq k \leq l \leq n$ , o produto

$$\binom{n}{l} \binom{l}{k}$$

não é igual a

- a)  $\binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k}$   c)  $\binom{n}{n-k} \binom{n-k}{n-l}$ .  
 b)  $\binom{n}{k} \binom{n-l}{l-k}$   d)  $\binom{n}{n-k} \binom{n-k}{l-k}$ .

3. Relativamente à soma

$$\sum_{k=0}^n (k! - k^k)$$

pode dizer-se que ...

- a) a soma é um valor não negativo  
 b) a soma é um valor não positivo  
 c) a soma é um valor estritamente negativo  
 d) a soma é um valor estritamente positivo

Nome: .....  
Nº de Estudante: ..... B. I. nº .....  
Turma ..... Assinatura do Vigilante: .....

---

4. A soma  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n 2$  é igual a

a)  $n^2 + 2n$

c)  $n^2 - n$

b)  $n^2 - 2n$

d)  $n^2 + n$

### RESPONDA ÀS QUESTÕES SEGUINTE NA FOLHA DE PONTO

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

5. Pretende-se arrumar numa prateleira 4 CD's de música clássica, 6 CD's de música jazz e 2 CD's de música Pop. Quantas são as possíveis maneiras de arrumar os CD's de modo que:

5.1. Os CD's do mesmo estilo musical fiquem juntos.

5.2. Os CD's de música clássica fiquem juntos.

5.3. Apenas os CD's de música clássica fiquem juntos.

6. Mostre que

$$\sum_{k=1}^n k!k = (n+1)! - 1$$

por recurso...

6.1. ... ao método de indução matemática.

6.2. ... ao método telescópico.

7.

7.1. Sabido que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(k+5)!}{(k+1)!} = \frac{(n+6)!}{5(n+1)!} - 4!,$$

determine pelo **método da perturbação** o valor da soma

$$\sum_{k=0}^n \frac{(k+4)!}{k!}.$$

7.2. Calcule o valor da soma

$$\sum_{k=0}^n \binom{k+4}{k}.$$

8. Sejam  $\langle a_n \rangle$  e  $\langle b_n \rangle$  duas sucessões definidas recursivamente pelo sistema

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + 6b_{n-1} \end{cases}, \quad n \geq 1,$$

e pelas condições iniciais  $a_0 = 1, a_1 = 3$ .

8.1. Prove que  $\langle a_n \rangle$  satisfaz a relação de recorrência

$$a_n = 9a_{n-1} - 14a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

8.2. Por recurso ao **método do polinómio característico**, determine o termo geral da sucessão  $\langle a_n \rangle$ .

8.3. Determine o valor da soma

$$\sum_{k=0}^n b_k.$$

## FORMULÁRIO

- Lei de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- Revisão trinomial

$$\binom{n}{l} \binom{l}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k}$$

- Fórmula da extracção

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

- Teorema binomial

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

- Adição paralela

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

- Adição do índice superior

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- Adição alternada do índice inferior

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{m-1}{n}$$

- Convolução de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

FIM