Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

U.C. 21079
Lógica e Teoria de Conjuntos

13 de Fevereiro de 2017

- INSTRUÇÕES -

- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas, ou respostas apresentadas em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- A prova é constituída por 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- As respostas a esta prova devem ser precisas e objetivas. Responda apenas ao que é pedido, com justificação adequada.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos**.
- As questões terão as cotações seguintes:

1	2	3	4	5	6	7
3.0	3.0	4.0	2.0	1.0	4.0	3.0

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

1. Mostre que a Lei de Peirce

$$p \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p$$

é uma tautologia, usando:

a) tabelas de verdade

b) argumentação

c) por absurdo.

2. a) Mostre que a proposição $p \Rightarrow q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ é uma consequência lógica de $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

b) Demonstre que

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \vdash p \Rightarrow q \Rightarrow (p \Rightarrow r).$$

3. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade cujos parâmetros $\bar{n}$ (símbolo de constante), P (símbolo de relação 1-ária), R (símbolo de relação 2-ária) e respectivas interpretações são:

Domínio de interpretação: as variáveis denotam os números naturais.

$\bar{n}$: "o número natural n".

$P(x)$: "x é um número primo".

$R(x, y)$: "x divide y".

a) Determine a fbf de $\mathcal{L}$ correspondente à seguinte proposição composta.
"Qualquer número é primo **se e só se** é divisível por si próprio e pela número 1".

b) Indique o subconjunto de $\mathbb{N}$ que é definido pela interpretação da seguinte fbf de $\mathcal{L}$.

$$R(x, \overline{60}) \wedge R(x, \overline{24}).$$

4. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com parâmetros P e R (símbolos de relação 1-ária). Mostre que a fbf de $\mathcal{L}$

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \;\Rightarrow\; (\forall x\ P(x) \;\Rightarrow\; \forall x\ Q(x))$$

é uma tautologia.

5. Indique conjuntos A e B tais que:

a) $A \subseteq B$

b) $A \in B$.

6. Considere a equivalência $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \cap B = A$.

a) Apresente a demonstração informal.

b) Apresente a demonstração formal.

7. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade cujos parâmetros $\bar{n}$ (símbolo de constante), R (símbolo de relação 2-ária) e respectivas interpretações são:

Domínio de interpretação: as variáveis denotam os números naturais.

$\bar{n}$: "o número natural n".

$R(x, y)$: "x divide y".

Diga, justificando, se a relação R é

a) reflexiva

b) simétrica

c) transitiva.

FIM
