e-Fólio A

Nome: ....

B.I./C.C.: .... **Nº de Estudante:** ....

Licenciatura: .... **Turma:** ....

Unidade Curricular: Álgebra Linear I **Código:** 21002

Data: .... **Ano Letivo:** 2016/2017

Docente: Rafael Sasportes **Classificação:** ....

Para a resolução do e-Fólio A, aconselha-se que:

- Preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 5 grupos de questões, num total de 3 páginas e termina com a palavra FIM. As *suas respostas* às questões deste e-Fólio não podem ultrapassar **nove** páginas A4; páginas adicionais não serão classificadas.
- Escreva sempre com letra legível ou usando um processador de texto matemático conveniente.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um único documento digital (em formato **pdf**), incluindo obrigatoriamente esta folha de rosto e a página com as questões de escolha múltipla, e insira-o, na página moodle da sua turma, em "e-Fólio A" até ao dia **28 de novembro**.

Critérios de avaliação e cotação:

- A cotação total deste e-Fólio é de **4 valores**.
- Exceto nas questões de escolha múltipla, justifique *cuidadosa e detalhadamente* todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.
- Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores. Os Grupos II a V têm cotação de 0.75 valores cada.

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

1. No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ considere os seguintes subconjuntos:

1. $A = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon xy + zw = 0\}$,
2. $B = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon 2x + 3y = 4z + 5w\}$,
3. $C = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon w = z\}$,
4. $D = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon \sqrt{2}\, x = \sqrt{3}\, y\}$.

Então:

☐ **a)** Os conjuntos A, C e D são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$.

☐ **b)** Nenhum dos conjuntos A, B, C e D é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

☐ **c)** Só os conjuntos A e B são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$.

☐ **d)** Só o conjunto A não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

2. Considere as matrizes A, B e C definidas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então

☐ **a)** $AA^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ **c)** $CB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

☐ **b)** $BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

☐ **d)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ considere o sistema de equações que tem por matriz aumentada a seguinte matriz

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2\lambda \end{array}\right).$$

Então

☐ **a)** $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ o sistema tem solução única.

☐ **b)** $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ o sistema não tem solução.

☐ **c)** $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ o sistema é indeterminado.

☐ **d)** Se $\lambda = \sqrt{2}$ o sistema tem uma única solução.

4. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis.

Então

☐ **a)** $A + B$ é invertível.

☐ **c)** $A - B$ é invertível.

☐ **b)** AB é invertível.

☐ **d)** $A + A^2$ é invertível.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II.

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

i) Determine o determinante da matriz A.(*Sugestão: Reduza A a uma matriz triangular conveniente.*)

ii) Utilizando a alínea anterior determine a 4ª componente da solução da equação $AX = B$ onde $B = (1, 2, 3, 4, 5, 6)^{\top}$.

III. Sejam A, B e $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $B = M^{-1}AM$.

i) Mostre que $\det B = \det A$.

ii) Supondo agora que B é invertível.

a) Mostre que A é invertível.

b) Calcule $\det A^{-1}B$.

IV. Seja $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & \alpha & 2 & 2 \end{array}\right)$ a matriz aumentada de um sistema de equações lineares.

Discuta o sistema em função dos valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Determine em particular os valores dos parâmetros para os quais

i) O sistema tem solução única.

ii) O sistema não tem solução.

V. Diga, justificando, se os seguintes conjuntos são subespaços vetoriais de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

i) O conjunto das matrizes triangulares superiores 2×2.

ii) O conjunto das matrizes que comutam com a matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

iii) O conjunto das matrizes invertíveis 2×2.

iv) O conjunto das matrizes não invertíveis 2×2.

v) O conjunto das matrizes nilpotentes 2×2.

vi) O conjunto das matrizes $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)$ tais que $y + z = 0$.

FIM