UNIVERSIDADE ABERTA
www.univ-ab.pt

e-Fólio B

cartão de aprendizagem

Nome: ....

B. I.: .... **Nº de Estudante:** ....

Curso: .... **Turma:** ....

Unidade Curricular: Matemática Finita **Código:** 21082

Data: .... **Ano Lectivo:** 2013/14

Docente: Maria João Oliveira **Classificação:** ....

O e-Fólio é uma prova TOTALMENTE individual. A suspeita fundamentada de cópia, ou de plágio, é motivo de anulação imediata do mesmo.

Para a resolução do **e-Fólio B**, aconselha-se que:

- Imprima este documento (não necessariamente a cores) e preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 6 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra FIM. Responda às questões de escolha múltipla no espaço destinado a esse efeito. As suas respostas às restantes questões não devem ultrapassar 6 páginas.
- Escreva sempre com uma letra legível.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um documento único em **formato PDF**, que inclua esta folha de rosto, a folha das escolhas múltiplas e as suas restantes respostas, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em "e-Fólio B" até ao dia 19 de Maio.

Critérios de avaliação e cotação:

- Com excepção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A cotação total deste e-Fólio é de **4** valores.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 0.3 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado 0.1 valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões é de 0 valores. A distribuição da cotação é a seguinte:

1–3	ERRADAS				
C		0	1	2	3
E	0	0.0	0.0	0.0	0.0
R	1	0.3	0.2	0.1	
T	2	0.6	0.5		
AS	3	**0.9**			

4.	**5.**	**6.**
1.8 val.	**0.4** val.	**0.9** val.

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Considere as duas afirmações seguintes:

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Relativamente a estas afirmações podemos afirmar:

- ☐ **a)** Ambas são verdadeiras
- ☐ **b)** A afirmação (i) é verdadeira, mas a (ii) é falsa
- ☐ **c)** A afirmação (ii) é verdadeira, mas a (i) é falsa
- ☐ **d)** Ambas são falsas

2. Relativamente à dedução

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

pode afirmar-se:

- ☐ **a)** A dedução está correcta
- ☐ **b)** A primeira igualdade não está certa
- ☐ **c)** A segunda igualdade não está certa
- ☐ **d)** A terceira igualdade não está certa

3. Se $a_k = (-3)^k \binom{n}{k}$, então Δa_k **não** é igual a:

- ☐ **a)** $-(-3)^k \left(\binom{n+1}{k+1} + 2\binom{n}{k+1}\right)$
- ☐ **b)** $-(-3)^k \left(3\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}\right)$
- ☐ **c)** $(-3)^k \left(2\binom{n}{k} - 3\binom{n+1}{k+1}\right)$
- ☐ **d)** $-(-3)^k \left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}\right)$

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

4.

4.1. Dados dois números naturais $i < j$, mostre que

$$\sum_{k=i}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} \binom{k}{i} = 0$$

por recurso...

4.1.1. ... à fórmula de soma por partes.

4.1.2. ... por recurso a outro método, que não o método de indução matemática.

4.2. Por recurso à alínea anterior, prove que:

4.2.1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} (-1)^k = 0, \quad n > 1.$

4.2.2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^k = (-1)^n, \quad n \geq 0.$

5. Por recurso ao **método de indução matemática** mostre que

$$\sum_{k=0}^{n} k^n \binom{n}{k} (-1)^k = (-1)^n n!, \quad n \geq 1.$$

6. Sem recorrer ao método de indução matemática, prove as igualdades seguintes:

6.1.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{i+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{i}{k-1}.$$

6.2.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = H_n.$$

FIM

Correcção Sumária

Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**
c)	**a)**	**d)**

4.1.1. Tome-se $b_k = \binom{k}{i}$. Dado $a_k = (-1)^{k-1}\binom{j-1}{k-1}$, tem-se $\Delta a_k = (-1)^k\binom{j}{k}$. Logo, pela fórmula de soma por partes,

$$\sum_{k=i}^{j} b_k \Delta a_k = a_k b_k \Big|_i^{j+1} - \sum_{k=i}^{j} a_{k+1}\Delta b_k = a_{j+1}b_{j+1} - a_i b_i - \sum_{k=i}^{j} a_{k+1}\Delta b_k,$$

tem-se

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}\binom{k}{i} \\
= \;& \sum_{k=i}^{j}\underbrace{\binom{k}{i}}_{=b_k}\Delta a_k \\
= \;& (-1)^j\binom{j-1}{j}\binom{j+1}{i} - (-1)^{i-1}\binom{j-1}{i-1}\binom{i}{i} - \sum_{k=i}^{j} a_{k+1}\Delta\binom{k}{i} \\
= \;& -(-1)^{i-1}\binom{j-1}{i-1} - \sum_{k=i}^{j} a_{k+1}\Delta\binom{k}{i},
\end{aligned}$$

em que, pela lei de Pascal,

$$\Delta\binom{k}{i} = \binom{k+1}{i} - \binom{k}{i} = \binom{k}{i-1}.$$

Logo,

$$\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}\binom{k}{i} = -(-1)^{i-1}\binom{j-1}{i-1} - \sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{j-1}{k}\binom{k}{i-1},$$

com

$$\binom{j-1}{k}\binom{k}{i-1} = \left(\frac{k+1}{j}\binom{j}{k+1}\right)\left(\frac{i}{k+1}\binom{k+1}{i}\right) = \frac{i}{j}\binom{j}{k+1}\binom{k+1}{i},$$

pela fórmula da extracção, e, portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{j-1}{k}\binom{k}{i-1} &= \frac{i}{j}\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{j}{k+1}\binom{k+1}{i} \\
&= \frac{i}{j}\sum_{k=i+1}^{j+1}(-1)^{k-1}\binom{j}{k}\binom{k}{i} \\
&= \frac{i}{j}\sum_{k=i+1}^{j}(-1)^{k-1}\binom{j}{k}\binom{k}{i} \\
&= -\frac{i}{j}\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}\binom{k}{i}+\frac{i}{j}(-1)^i\binom{j}{i}\binom{i}{i}.
\end{aligned}$$

Em suma,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}\binom{k}{i} &= -(-1)^{i-1}\binom{j-1}{i-1}+\frac{i}{j}\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}\binom{k}{i}-(-1)^i\underbrace{\frac{i}{j}\binom{j}{i}}_{=\binom{j-1}{i-1}} \\
&= \frac{i}{j}\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}\binom{k}{i}
\end{aligned}$$

e, assim,

$$\left(1-\frac{i}{j}\right)\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}\binom{k}{i}=0,$$

o que conduz ao resultado pretendido por $i<j$ e, portanto, $1-\frac{i}{j}\neq 0$.

4.1.2. Pela fórmula de revisão trinomial tem-se

$$\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}\binom{k}{i}=\binom{j}{i}\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{j-i}{k-i}=\binom{j}{i}(-1)^i\sum_{k=i}^{j}(-1)^{k-i}\binom{j-i}{k-i},$$

que, mediante a mudança de variável $l=k-i$ e a fórmula binomial é igual a

$$\binom{j}{i}(-1)^i\sum_{l=0}^{j-i}(-1)^l\binom{j-i}{l}=\binom{j}{i}(-1)^i 0^{j-i}.$$

Como $j\neq i$, $0^{j-i}=0$.

4.2.1. Tem-se

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}(-1)^k=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}(-1)^k=\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}\binom{n}{k}(-1)^k,$$

que, pela alínea 4.1 com $j=n$ e $i=1$, é igual a 0.

4.2.2. Por aplicação da alínea 4.1 com $j=n+1$ e $i=0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^k &= -(-1)^{n+1}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k \\
&= -(-1)^{n+1}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\binom{k}{0}(-1)^k=(-1)^n.
\end{aligned}$$

5. **Case Base: $\mathbf{n = 1}$**. Neste caso, tem-se

$$\sum_{k=0}^{1} k\binom{1}{k}(-1)^k = -1 = (-1)^1 1!,$$

o que prova que o caso base verifica-se.

Hipótese de indução: Dado $n \geq 1$, **arbitrário**, suponhamos que

$$\sum_{k=0}^{n} k^n\binom{n}{k}(-1)^k = (-1)^n n!, \quad n \geq 1.$$

Por aplicação da fórmula da extracção e da lei de Pascal, comece-se por observar que para $n+1$ tem-se

$$k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1} = (n+1)\binom{n+1}{k} - (n+1)\binom{n}{k}, \quad k \geq 0.$$

Assim,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k = (n+1)\sum_{k=0}^{n+1} k^n\binom{n+1}{k}(-1)^k - (n+1)\sum_{k=0}^{n+1} k^n\binom{n}{k}(-1)^k,$$

em que, pelo exercício 17 da Actividade Formativa 2,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^n\binom{n+1}{k}(-1)^k = 0$$

e, por $\binom{n}{n+1} = 0$ e pela hipótese de indução,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^n\binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} k^n\binom{n}{k}(-1)^k = (-1)^n n!.$$

Deste modo,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k = -(n+1)n!(-1)^n = (-1)^{n+1}(n+1)!$$

Pelo método de indução matemática, podemos assim concluir que, para qualquer número natural $n \geq 1$ é válida a igualdade pretendida.

6.

6.1. Pela fórmula de adição do índice superior tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{i=k-1}^{n-1}\binom{i}{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{i}{k-1}\|i \geq k-1\| \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{i}{k-1}\|k \leq i+1\| \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{i+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{i}{k-1}.
\end{aligned}$$

6.2. Pela alínea anterior tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{i+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{i}{k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^{k+2}}{k+1}\binom{i}{k} \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{i}{k},
\end{aligned}$$

em que, pela fórmula da extracção,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{i}{k} &= \frac{1}{i+1}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{k+1}\binom{i+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i+1}(-1)^{k}\binom{i+1}{k} \\
&= -\frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+1}\sum_{k=0}^{i+1}(-1)^{k}\binom{i+1}{k},
\end{aligned}$$

com

$$\sum_{k=0}^{i+1}(-1)^{k}\binom{i+1}{k} = (-1+1)^{i+1} = 0,$$

pelo teorema binomial. Conclusão,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = -\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = H_n.$$