

U.C. 21002  
Álgebra Linear I

27 de fevereiro de 2015

- O p-fólio é composto por 4 grupos de questões e respetivas alíneas, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos **II**, **III** e **IV** deverão ser respondidas no Caderno de Prova. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o p-fólio tem a duração máxima de **1 hora e 30 minutos**.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados  $\frac{1}{3}$  valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. As restantes questões terão as cotações seguintes:

<b>II</b>	<b>III</b>	<b>IV</b>
2 val.	5 val.	2 val.

Nome: .....

N<sup>o</sup> de Estudante: ..... B. I./C.C. n<sup>o</sup> .....

Turma ..... Assinatura do Vigilante: .....

---

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

**Questão 1**

Considere os subconjuntos de  $\mathbb{R}^4$  definidos por

$$A = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : xy = 0\}, \quad B = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0\}, \\ C = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + w = 0\}, \quad D = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z - w = 0\}.$$

Então:

- a) Os conjuntos  $A, B, C$  e  $D$  são subespaços de  $\mathbb{R}^4$ .
- b) Só os conjuntos  $B, C$  e  $D$  são subespaços de  $\mathbb{R}^4$ .
- c) Só os conjuntos  $C$  e  $D$  são subespaços de  $\mathbb{R}^4$ .
- d) O conjunto  $D$  não é subespaço de  $\mathbb{R}^4$ .

**Questão 2**

Sejam  $F$  e  $G$  subespaços de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  tais que

$$F = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ e } G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Então:

- a)  $\dim(F + G) = 3$ .
- b)  $\dim(F \cap G) = 0$ .
- c)  $\dim(F + G) = 4$ .
- d)  $\dim F = 1$ .

Nome: .....  
Nº de Estudante: ..... B. I./C.C. nº .....  
Turma ..... Assinatura do Vigilante: .....

---

### Questão 3

Seja  $E$  um espaço vetorial e  $(u, v, w)$  uma sequência linearmente independente. Então:

- a) Os vetores  $u, u + v$  e  $v + w$  são linearmente independentes.
- b) Os vetores  $u$  e  $u - v$  são linearmente dependentes.
- c) Os vetores  $u, v$  e  $w$  formam uma base de  $E$ .
- d) Existe  $\alpha \neq 0$  tal que  $u = \alpha v$ .

### RESPONDA AOS GRUPOS SEGUINTE NO CADERNO DE PROVA

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

- II. Diga se é verdadeira ou falsa a afirmação seguinte, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  definida por  $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Então 1 é valor próprio de  $A$  se e sómente se  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

- III. Considere as matrizes

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e a transformação linear  $T: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por

$$T(M_1) = M_2, T(M_2) = M_3 + M_4, T(M_3) = M_2 - M_1, T(M_4) = M_1.$$

- a) Mostre que as matrizes  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  constituem uma base de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .
- b) Justifique que  $T$  está bem definida.
- c) Seja  $\mathcal{B}$  a base de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  da alínea a). Determine a matriz  $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ , que representa  $T$  em relação à base  $\mathcal{B}$  em ambos os espaços de partida e de chegada.
- d) Calcule os valores próprios de  $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \mathcal{B})$  e os correspondentes subespaços próprios<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Se não resolveu a alínea c) resolva esta alínea considerando a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nome: .....  
Nº de Estudante: ..... B. I./C.C. nº .....  
Turma ..... Assinatura do Vigilante: .....

---

IV. Seja  $E$  um espaço vetorial real de dimensão  $n > 1$ , e  $T: E \rightarrow E$  uma transformação linear.

- a) Suponha que existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que  $T^2(v) = \mu T(v)$ ,  $\forall v \in E$   
(ou seja  $T(T(v)) = \mu T(v)$ ,  $\forall v \in E$ ).

Determine os possíveis valores próprios da transformação  $T$ .

- b) Nas condições da alínea anterior mostre que se  $\mu \neq 1$  então a transformação linear definida por

$$S(v) = v - T(v)$$

é invertível.

FIM