U.C. 71061

Curso de Qualificação para Estudos Superiores - Matemática

15 de março de 2017

Critérios de avaliação:

- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efectuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.

Correcção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correcta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

1. (4.0 valores)

1.1. (1.5 valor) Uma vez que

$$0.55 = F_2 = f_1 + f_2 = f_1 + 0.30,$$

tem-se que $F_1 = f_1 = 0.25$. Por outro lado,

$$0.75 = F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = F_2 + f_3 = 0.55 + f_3 \implies f_3 = 0.20.$$

Como $F_4 = 1$ e $F_4 = f_4 + F_3$, conclui-se que $f_4 = 0.25$, com o que fica completo o Quadro:

Nº de filhos	f_i	F_i
1	**0.25**	**0.25**
2	0.30	0.55
3	**0.2**	0.75
4	**0.25**	**1**

1.2. (1.25 valor) A frequência relativa simples dos casais inquiridos com pelo menos dois filhos é igual a $f_2 + f_3 + f_4 = 0.75$. Pela definição de uma frequência relativa simples, isto significa que a percentagem de casais nas condições pedidas é igual a $0.75 \times 100\% = 75\%$.

1.3. (1.25 valor) Por definição de frequência relativa simples,

$$f_i = \frac{n_i}{N},$$

onde n_i é o número de casais inquiridos com i filhos, $i = 1, 2, 3, 4$, e $N = 80$ o número total de casais com filhos inquiridos. Logo, o número de casais inquiridos com três ou menos filhos é igual a

$$n_1 + n_2 + n_3 = (f_1 + f_2 + f_3) \times N = 0.75 \times 80 = \frac{3}{4} \times 80 = 60.$$

2. (2.0 valores) Para que a função f esteja bem definida, o denominador tem de ser diferente de zero e a função que surge no numerador, $x \mapsto \sqrt{2+x}$, tem de estar bem definida. Tal acontece se $2 + x \geq 0$. Assim o domínio da função f é igual a

$$\{x \in \mathbb{R} : 2 + x \geq 0 \wedge x^2 - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2 + x \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\}.$$

Como $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, conclui-se que

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

e, consequentemente,

$$\{x \in \mathbb{R} : 2 + x \geq 0 \wedge x^2 - 4 \neq 0\} = [-2, +\infty[\cap (\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}) =]-2, +\infty[\setminus \{2\}.$$

3. (2.0 valores) Ver resolução do exercício 2.2 sobre Limites de Sucessões e de Funções.

4. (2.0 valores) No intervalo $]-\infty, 0[$, a função é contínua, pois trata-se de uma função polinomial (polinómio), que é contínua em $\mathbb{R}$; logo e em particular, em qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$.

No intervalo $]0, +\infty[$, a função é contínua por se tratar da função exponencial, que é contínua em $\mathbb{R}$. Em particular, é contínua em qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$.

Relativamente ao ponto $x = 0$, tem-se

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} a - x^2 = a$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = e^0 = 1.$$

Deste modo, existirá o limite $\lim_{x\to 0} g(x)$ se

$$1 = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = a$$

Nesta situação ($a = 1$), $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ e, como $g(0) = a - 0 = a = 1$, tem-se ainda

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1 = g(0),$$

o que prova, por definição, que g é contínua no ponto 0.

Pelos três casos analisados separadamente podemos então concluir que para $a = 1$ a função g é contínua em $\mathbb{R}$.

5. (2.0 valores) Pela regra da derivada da função composta,

$$h'(x) = \frac{1}{2 + \operatorname{sen}(x)} \left(2 + \operatorname{sen}(x)\right)',$$

uma vez que $(\log(x))' = \frac{1}{x}$ para qualquer $x > 0$. Deste modo,

$$h'(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \operatorname{sen}(x)}.$$