**U.C. 21037**

**Elementos de Probabilidades e Estatística**

**3 de julho de 2015**

# - INSTRUÇÕES -

- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- O exame é composto por 4 grupos de questões, contém 1 página e termina com a palavra **FIM** e por um formulário de duas páginas. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- É permitido o uso de máquina de calcular. Não é permitido a utilização de elementos de consulta.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos**.

## Critérios de avaliação e cotação:

- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A distribuição da cotação total (20 valores) pelos 4 grupos de questões é a seguinte:

| Grupo | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Cotação | 4.70 | 3.0 | 6.30 | 6.0 |

**1.** Do conjunto de empresas que actuam num dado sector industrial sabe-se que 60% dessas empresas têm departamento de controlo de qualidade, 40% têm departamento de recursos humanos e 20% têm ambos os departamentos.

Escolhe-se ao acaso uma empresa do referido sector industrial. Calcule a probabilidade da empresa seleccionada se encontrar nas seguintes condições:

**1.1.** Ter departamento de controlo de qualidade ou departamento de recursos humanos.

**1.2.** Ter apenas um dos departamentos.

**1.3.** Não ter qualquer um destes departamentos.

**2.** Numa empresa existe um grande número de telefones. Após muitas observações, concluiu-se que o números de telefones que avariam em cada mês é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de média 2.5. Assim sendo, calcule:

**2.1.** A probabilidade de durante um mês se avariarem mais de 5 telefones.

**2.2.** A capacidade mensal mínima de resposta da empresa de manutenção dos telefones, de modo que a probabilidade de não haver telefones aguardando reparação seja de pelo menos 0.9.

**3.** Seja $(X, Y)$ um par aleatório **discreto**. A informação conhecida sobre a função de probabilidade conjunta de $(X, Y)$ e sobre as funções de probabilidade marginal é a que consta no quadro seguinte:

| $f(x, y)$ | $y = 0$ | $y = 1$ | $y = 2$ | $f_X(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x = 0$ | 0.10 | | 0.20 | 0.45 |
| $x = 1$ | | 0.15 | 0.15 | |
| $x = 2$ | 0.05 | | | |
| $f_Y(y)$ | 0.25 | | 0.40 | |

**3.1.** Complete o quadro, justificando detalhadamente todos os raciocínios e cálculos que efectuar.

**3.2.** Calcule $P(X \leq 1, Y = 1)$, $P(X \leq 1, Y \leq 2)$ e $P(Y \geq 2)$.

**3.3.** Determine $V(X)$.

**3.4.** Calcule a covariância entre $X$ e $Y$ e indique que conclusões se poderão tirar relativamente à independência, ou não, das variáveis aleatórias $X$ e $Y$.

**4.** Considere a seguinte função densidade de probabilidade de uma variável aleatória **contínua** $X$:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } 0 < x < 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

**4.1.** O valor da constante $c$.

**4.2.** Todos os momentos $E(X^k)$ da variável aleatória $X$.

**4.3.** $P(1 < X \leq 2)$, $P(X > 1)$ e $P(X < 2 \,|\, X \geq 1)$.

**4.4.** A função de distribuição de $X$.

**FIM**

**FORMULÁRIO**

| Modelos | Expressão das funções de Probabilidade | $\mu$ | $\sigma^2$ |
|---|---|---|---|
| Bernoulli | $P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$<br>$x=0,1$ | $p$ | $p(1-p)$ |
| Binomial | $P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$<br>$x=0,1,..n$ | $np$ | $np(1-p)$ |
| Poisson | $P(X=x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$<br>$x=0,1,...$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| Uniforme | $P(X=x)=\dfrac{1}{n}$ $x=0,1,...$ | $\dfrac{n+1}{2}$ | $\dfrac{n^2-1}{12}$ |
| Geométrica | $P(X=x)=p(1-p)^{x-1}$; $x=1,...$ | $\dfrac{1}{p}$ | $\dfrac{1-p}{p^2}$ |
| Hipergeométrica | $P(X=x)=\dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ | $n\dfrac{M}{N}$ | $n\dfrac{M}{N}.\dfrac{N-M}{N}.\dfrac{N-n}{N-1}$ |

| | **Expressão das funções de:** | | $\mu$ | $\sigma^2$ |
|---|---|---|---|---|
| Modelos | **Densidade** | **Distribuição** | | |
| Exponencial | $f(x)=\lambda\, exp(-\lambda x)\quad x>0$ | $F(x)=1-exp(-\lambda x)\quad x>0$ | $\dfrac{1}{\lambda}$ | $\dfrac{1}{\lambda^2}$ |
| Uniforme | $f(x)=\dfrac{1}{b-a}\quad x\in[a,b]$ | $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}\quad x\in[a,b[$ | $\dfrac{a+b}{2}$ | $\dfrac{(b-a)^2}{12}$ |
| Normal | $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$ | | $\mu$ | $\sigma^2$ |

# TABELA 2 – DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

## A. Função probabilidade

$$f(x \mid \lambda) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

λ

| x | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | .9048 | .8187 | .7408 | .6703 | .6065 | .5488 | .4966 | .4493 | .4066 | .3679 |
| **1** | .0905 | .1637 | .2222 | .2681 | .3033 | .3293 | .3476 | .3595 | .3659 | .3679 |
| **2** | .0045 | .0164 | .0333 | .0536 | .0758 | .0988 | .1217 | .1438 | .1647 | .1839 |
| **3** | .0002 | .0011 | .0033 | .0072 | .0126 | .0198 | .0284 | .0383 | .0494 | .0613 |
| **4** | .0000 | .0001 | .0003 | .0007 | .0016 | .0030 | .0050 | .0077 | .0111 | .0153 |
| **5** | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0002 | .0004 | .0007 | .0012 | .0020 | .0031 |
| **6** | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0002 | .0003 | .0005 |
| **7** | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 |

| x | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | .3329 | .3012 | .2725 | .2466 | .2231 | .2019 | .1827 | .1653 | .1496 | .1353 |
| **1** | .3662 | .3614 | .3543 | .3452 | .3347 | .3230 | .3106 | .2975 | .2842 | .2707 |
| **2** | .2014 | .2169 | .2303 | .2417 | .2510 | .2584 | .2640 | .2678 | .2700 | .2707 |
| **3** | .0738 | .0867 | .0998 | .1128 | .1255 | .1378 | .1496 | .1607 | .1710 | .1804 |
| **4** | .0203 | .0260 | .0324 | .0395 | .0471 | .0551 | .0636 | .0723 | .0812 | .0902 |
| **5** | .0045 | .0062 | .0084 | .0111 | .0141 | .0176 | .0216 | .0260 | .0309 | .0361 |
| **6** | .0008 | .0012 | .0018 | .0026 | .0035 | .0047 | .0061 | .0078 | .0098 | .0120 |
| **7** | .0001 | .0002 | .0003 | .0005 | .0008 | .0011 | .0015 | .0020 | .0027 | .0034 |
| **8** | .0000 | .0000 | .0001 | .0001 | .0001 | .0002 | .0003 | .0005 | .0006 | .0009 |
| **9** | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0001 | .0001 | .0002 |

| x | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 | 2.6 | 2.7 | 2.8 | 2.9 | 3.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | .1225 | .1108 | .1003 | .0907 | .0821 | .0743 | .0672 | .0608 | .0550 | .0498 |
| **1** | .2572 | .2438 | .2306 | .2177 | .2052 | .1931 | .1815 | .1703 | .1596 | .1494 |
| **2** | .2700 | .2681 | .2652 | .2613 | .2565 | .2510 | .2450 | .2384 | .2314 | .2240 |
| **3** | .1890 | .1966 | .2033 | .2090 | .2138 | .2176 | .2205 | .2225 | .2237 | .2240 |
| **4** | .0992 | .1082 | .1169 | .1254 | .1336 | .1414 | .1488 | .1557 | .1622 | .1680 |
| **5** | .0417 | .0476 | .0538 | .0602 | .0668 | .0735 | .0804 | .0872 | .0940 | .1008 |
| **6** | .0146 | .0174 | .0206 | .0241 | .0278 | .0319 | .0362 | .0407 | .0455 | .0504 |
| **7** | .0044 | .0055 | .0068 | .0083 | .0099 | .0118 | .0139 | .0163 | .0188 | .0216 |
| **8** | .0011 | .0015 | .0019 | .0025 | .0031 | .0038 | .0047 | .0057 | .0068 | .0081 |
| **9** | .0003 | .0004 | .0005 | .0007 | .0009 | .0011 | .0014 | .0018 | .0022 | .0027 |
| **10** | .0001 | .0001 | .0001 | .0002 | .0002 | .0003 | .0004 | .0005 | .0006 | .0008 |
| **11** | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0001 | .0001 | .0002 | .0002 |
| **12** | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 |

## B. Função de distribuição

$$F(x \mid \lambda) = P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i}}{i!}$$

λ

| x | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | .9048 | .8187 | .7408 | .6703 | .6065 | .5488 | .4966 | .4493 | .4066 | .3679 |
| **1** | .9953 | .9825 | .9631 | .9384 | .9098 | .8781 | .8442 | .8088 | .7725 | .7358 |
| **2** | .9998 | .9989 | .9964 | .9921 | .9856 | .9769 | .9659 | .9526 | .9371 | .9197 |
| **3** | 1.0000 | .9999 | .9997 | .9992 | .9982 | .9966 | .9942 | .9909 | .9865 | .9810 |
| **4** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999 | .9998 | .9996 | .9992 | .9986 | .9977 | .9963 |
| **5** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999 | .9998 | .9997 | .9994 |
| **6** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999 |
| **7** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

| x | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | .3329 | .3012 | .2725 | .2466 | .2231 | .2019 | .1827 | .1653 | .1496 | .1353 |
| **1** | .6990 | .6626 | .6268 | .5918 | .5578 | .5249 | .4932 | .4628 | .4337 | .4060 |
| **2** | .9004 | .8795 | .8571 | .8335 | .8088 | .7834 | .7572 | .7306 | .7037 | .6767 |
| **3** | .9743 | .9662 | .9569 | .9463 | .9344 | .9212 | .9068 | .8913 | .8747 | .8571 |
| **4** | .9946 | .9923 | .9893 | .9857 | .9814 | .9763 | .9704 | .9636 | .9559 | .9473 |
| **5** | .9990 | .9985 | .9978 | .9968 | .9955 | .9940 | .9920 | .9896 | .9868 | .9834 |
| **6** | .9999 | .9997 | .9996 | .9994 | .9991 | .9987 | .9981 | .9974 | .9966 | .9955 |
| **7** | 1.0000 | 1.0000 | .9999 | .9999 | .9998 | .9997 | .9996 | .9994 | .9992 | .9989 |
| **8** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999 | .9999 | .9998 | .9998 |
| **9** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

| x | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 | 2.6 | 2.7 | 2.8 | 2.9 | 3.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | .1225 | .1108 | .1003 | .0907 | .0821 | .0743 | .0672 | .0608 | .0550 | .0498 |
| **1** | .3796 | .3546 | .3309 | .3084 | .2873 | .2674 | .2487 | .2311 | .2146 | .1991 |
| **2** | .6496 | .6227 | .5960 | .5697 | .5438 | .5184 | .4936 | .4695 | .4460 | .4232 |
| **3** | .8386 | .8194 | .7993 | .7787 | .7576 | .7360 | .7141 | .6919 | .6696 | .6472 |
| **4** | .9379 | .9275 | .9162 | .9041 | .8912 | .8774 | .8629 | .8477 | .8318 | .8153 |
| **5** | .9796 | .9751 | .9700 | .9643 | .9580 | .9510 | .9433 | .9349 | .9258 | .9161 |
| **6** | .9941 | .9925 | .9906 | .9884 | .9858 | .9828 | .9794 | .9756 | .9713 | .9665 |
| **7** | .9985 | .9980 | .9974 | .9967 | .9958 | .9947 | .9934 | .9919 | .9901 | .9881 |
| **8** | .9997 | .9995 | .9994 | .9991 | .9989 | .9985 | .9981 | .9976 | .9969 | .9962 |
| **9** | .9999 | .9999 | .9999 | .9998 | .9997 | .9996 | .9995 | .9993 | .9991 | .9989 |
| **10** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999 | .9999 | .9999 | .9998 | .9998 | .9997 |
| **11** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | .9999 | .9999 |
| **12** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |